GRANVILLE
SMITH
MIKESH

trigonometría plana y esférica

CON TABLAS
TRIGONOMETRICAS

TRIGONOMETRÍA PLANA Y ESFÉRICA

CON TABLAS TRIGONOMÉTRICAS

WILLIAM ANTHONY GRANVILLE, Ph. D., LL. D.
Ex presidente del Gettysburg College.
E.U.A.

Edición revisada por

PERCEY F. SMITH, Ph. D.
Profesor de Matemáticas, Yale University

JAMES S. MIKESH, B.A.
Director del departamento de Matemáticas,
Lawrenceville School
E.U.A.

Título de la obra en inglés:
PLANE AND SPHERICAL TRIGONOMETRY
Ginn and Company, Boston, Massachusetts, E.U.A.
Traducción al español:
Ing. Rafael García Díaz

PROLOGO

En la Trigonometría Plana y esférica de Granville que ofrecemos al lector de habla castellana, los autores han seguido los lineamientos que han hecho populares los libros de Granville entre profesores y estudiantes, a saber, simplicidad, claridad de exposición, abundancia de ejercicios desarrollados en el texto y gran variedad de problemas de aplicación a los diversos campos de la ciencia. Se ha dado más importancia al estudio de las funciones trigonométricas como tales que a las razones deducidas de un triángulo rectángulo, presentando este aspecto funcional de manera clara y sençilla, pensando en las aplicaciones de la Trigonometría a estudios superiores.

En los ejercicios y problemas se presentan ejemplos a resolver con y sin logaritmos, y con ángulos en grados y minutos, unas veces, y otras, en grados y fracción decimal de grado, sirviendo las tablas para ambos tipos de problemas.

Los capítulos dedicados al estudio de las identidades y ecuaciones trigonométricas creemos serán de gran interés y utllidad para estudios posteriores de Matemáticas.

Los editores.

INDICE

TRIGONOMETRIA PLANA

Capítulo I

LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

Capítulo II

RELACIONES FUNDAMENTALES. FORMULAS DE REDUCCION

CAPÍTULO V

TEORIA Y USO DE LOS LOGARITMOS

CAPÍTULO VI

ANALISIS TRIGONOMETRICO

CAPÍTULO VII

ANGULOS AGUDOS PROXIMOS A 0° O A 90°

CAPÍTULO VIII

RECAPITULACION DE FORMULAS

Fórmulas de Trigonometría plana:

TRIGONOMETRIA ESFERICA

CAPÍTULO IX

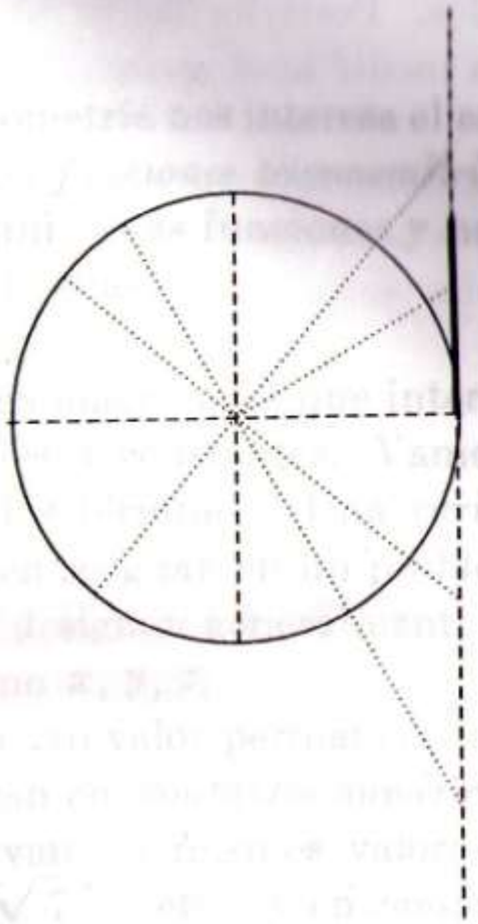
TRIANGULOS ESFERICOS RECTANGULOS

Capítulo XII

RECAPITULACION DE FORMULAS

Fórmulas de Trigonometría esférica:

TABLAS LOGARITMICAS Y TRIGONOMETRICAS



TRIGONOMETRÍA PLANA

CAPITULO PRIMERO

LAS FUNCIONES TRIGONOMETRICAS

1. Trigonometría. En Trigonometría nos interesa el estudio de ciertas magnitudes llamadas *funciones trigonométricas*. El objeto de este capítulo es definir estas funciones y hacer algunas aplicaciones elementales de ellas.

2. Variables y constantes. Las magnitudes que intervienen en un problema son variables o constantes. Vamos a precisar la diferencia entre estos dos términos. Una *variable* es un símbolo al cual se le pueden asignar en un problema diversos valores. Las variables se designan generalmente por las últimas letras del alfabeto, como x, y, z.

Una *constante* es una cantidad cuyo valor permanece invariable en un problema Se clasifican en *constantes numéricas* o *absolutas*, que son las que conservan los mismos valores en todos los problemas, como 2, 5, $\sqrt{7}$, π, etc , y en *constantes arbitrarias*, que son aquellas cuyos valores son arbitrarios, pero fijos, para cada problema en particular. Estas se designan generalmente por las primeras letras del alfabeto, como a, b, c, etc.

3. Funciones. *Función de una variable* es una magnitud cuyo valor queda siempre determinado cuando se le da un valor apropiado a la variable. El *área* de un cuadrado es una función de la *longitud* del lado, y el *volumen* de una esfera es una función de su *diámetro*. Análogamente, el trinomio

x^2-7x-6 es una *función* de x porque su valor queda determinado cuando se le da un valor a x. En las funciones trigonométricas la variable es la medida de un ángulo, y los valores de estas funciones quedan siempre determinados cuando se da la medida del ángulo. Por el momento, vamos a considerar que la medida de los ángulos se expresa en grados. Posteriormente consideraremos un segundo método para medir los ángulos.

4. Funciones trigonométricas de un ángulo agudo. Suponemos al lector familiarizado con la noción del *ángulo formado por dos rectas* como se estudia en Geometría plana elemental.

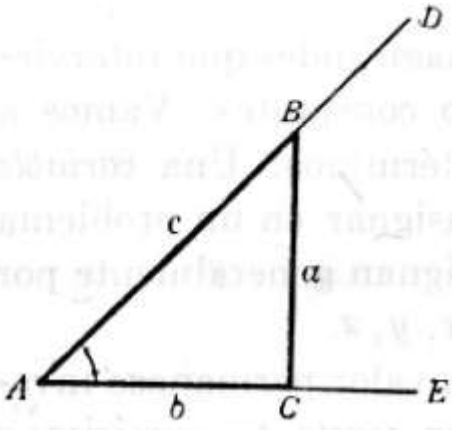


Fig. 1

En este artículo nos limitaremos a la consideración de ángulos agudos.

Sea EAD un ángulo menor de $90°$, es decir, un ángulo agudo. Desde B, que es un punto cualquiera de uno de los lados del ángulo, tracemos una perpendicular al otro lado, formando así el triángulo rectángulo ABC. Designemos por las letras mayúsculas A, B, C las medidas de los ángulos y por las letras minúsculas a, b, c las longitudes de los lados opuestos correspondientes en el triángulo rectángulo.* Sabemos, por Geometría, que los lados y ángulos de este triángulo son mutuamente dependientes. La Trigonometría comienza por enseñar la naturaleza exacta de esta dependencia, y para este objeto emplea las *razones de los lados*. Estas razones se llaman *funciones trigonométricas*. Las seis funciones trigonométricas de cualquier ángulo agudo, como A, se designan como sigue:

* De no especificarse otra cosa, la hipotenusa de un triángulo rectángulo será designada siempre por c y el ángulo recto por C.

sen A, que se lee "seno de A";

cos A, que se lee "coseno de A";

tg A, que se lee "tangente de A";

csc A, que se lee "cosecante de A";

sec A, que se lee "secante de A";

ctg A, que se lee "cotangente de A".

Estas funciones (o razones) trigonométricas se definen como sigue (véase la figura 1):

$$\text{(1)}\quad \operatorname{sen} A = \frac{\text{lado opuesto}}{\text{hipotenusa}}\left(=\frac{a}{c}\right);$$

$$\text{(2)}\quad \cos A = \frac{\text{lado adyacente}}{\text{hipotenusa}}\left(=\frac{b}{c}\right);$$

$$\text{(3)}\quad \operatorname{tg} A = \frac{\text{lado opuesto}}{\text{lado adyacente}}\left(=\frac{a}{b}\right);$$

$$\text{(4)}\quad \csc A = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{lado opuesto}}\left(=\frac{c}{a}\right);$$

$$\text{(5)}\quad \sec A = \frac{\text{hipotenusa}}{\text{lado adyacente}}\left(=\frac{c}{b}\right);$$

$$\text{(6)}\quad \operatorname{ctg} A = \frac{\text{lado adyacente}}{\text{lado opuesto}}\left(=\frac{b}{a}\right).$$

El hecho esencial de que el valor numérico de cualquiera de estas funciones dependa solamente de la *magnitud* del ángulo A, es decir, que es independiente del punto B desde el cual se traza la perpendicular al otro lado, se establece fácilmente.

En efecto: sea B' (fig. 2) otro punto cualquiera de AD, y B'' un punto cualquiera de AE. Tracemos las perpendiculares $B'C'$ y $B''C''$ a AE y AD, respectivamente. Los tres triángulos ABC, $AB'C'$ y $AB''C''$ tienen sus ángulos iguales, ya que son rectángulos y tienen un ángulo común, A. Por lo tanto, son semejantes, y tenemos

$$\frac{BC}{AB} = \frac{B'C'}{AB'} = \frac{B''C''}{AB''}.$$

Y como cada una de estas razones define el *seno de A*, queda demostrado que el valor de la función no depende del triángulo elegido. De la misma manera se demuestra para cada una de las otras funciones.

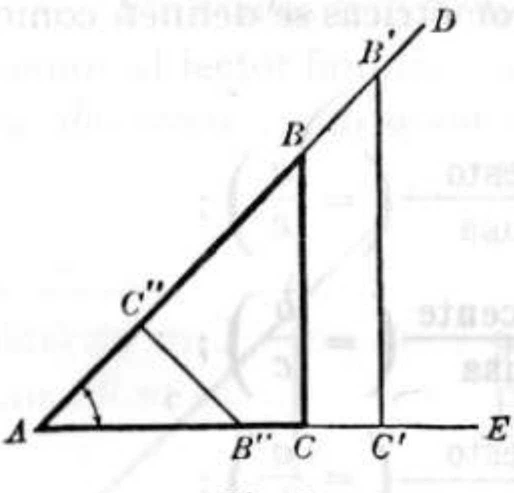


Fig. 2

El lector, en cambio, debe observar que cada una de las seis razones trigonométricas cambian de valor al variar el ángulo A.

Estas funciones (o razones) son de importancia fundamental en el estudio de la Trigonometría. En suma, no se puede hacer ningún progreso en este estudio sin un completo conocimiento de las seis definiciones anteriores. Estas son fáciles de aprenderse de memoria, observando que las tres primeras son recíprocas, respectivamente, de las tres últimas. En efecto:

$$\operatorname{sen} A = \frac{a}{c} = \frac{1}{\frac{c}{a}} = \frac{1}{\csc A}; \quad \csc A = \frac{c}{a} = \frac{1}{\frac{a}{c}} = \frac{1}{\operatorname{sen} A};$$

$$\cos A = \frac{b}{c} = \frac{1}{\frac{c}{b}} = \frac{1}{\sec A}; \quad \sec A = \frac{c}{b} = \frac{1}{\frac{b}{c}} = \frac{1}{\cos A};$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{a}{b} = \frac{1}{\frac{b}{a}} = \frac{1}{\operatorname{ctg} A}; \quad \operatorname{ctg} A = \frac{b}{a} = \frac{1}{\frac{a}{b}} = \frac{1}{\operatorname{tg} A}.$$

Apliquemos las definiciones **(1)** a **(6)** inclusive, al ángulo agudo B de la figura **1**. En este caso, el lado opuesto es igual a $AC=b$, y el lado adyacente$=BC=a$. Por tanto,

$$\operatorname{sen} B = \frac{b}{c}; \qquad \csc B = \frac{c}{b};$$

$$\cos B = \frac{a}{c}; \qquad \sec B = \frac{c}{a};$$

$$\operatorname{tg} B = \frac{b}{a}; \qquad \operatorname{ctg} B = \frac{a}{b}.$$

Comparando estas funciones con las del ángulo A, vemos que

$$\operatorname{sen} A = \cos B; \qquad \csc A = \sec B;$$

$$\cos A = \operatorname{sen} B; \qquad \sec A = \csc B;$$

$$\operatorname{tg} A = \operatorname{ctg} B; \qquad \operatorname{ctg} A = \operatorname{tg} B.$$

Como $A+B=90^\circ$ (es decir, A y B son complementarios), los resultados anteriores pueden enunciarse como sigue:

Teorema. *Una función trigonométrica de un ángulo agudo es igual a la cofunción* de su ángulo complementario.*

El enunciado del teorema expresa las siguientes igualdades:

$$\operatorname{sen} A = \cos(90^\circ - A); \quad \csc A = \sec(90^\circ - A);$$

$$\cos A = \operatorname{sen}(90^\circ - A); \quad \sec A = \csc(90^\circ - A);$$

$$\operatorname{tg} A = \operatorname{ctg}(90^\circ - A); \quad \operatorname{ctg} A = \operatorname{tg}(90^\circ - A).$$

EJERCICIO 1. Calcular las funciones trigonométricas del ángulo A en el triángulo rectángulo cuyos catetos son $a=3$, $b=4$.

* El seno y el coseno se llaman cofunciones una de la otra. Similarmente la tangente y la cotangente, y la secante y la cosecante, son cofunciones.

Solución. $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{9+16}=\sqrt{25}=5.$

Aplicando las definiciones (1) a (6) inclusive del Artículo 4, tendremos:

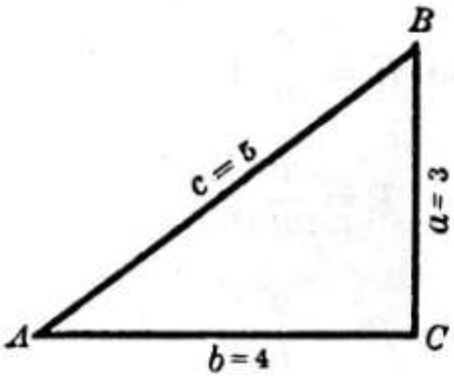


Fig. 3

$$\text{sen } A=\frac{3}{5}; \qquad \csc A=\frac{5}{3};$$

$$\cos A=\frac{4}{5}; \qquad \sec A=\frac{5}{4};$$

$$\text{tg } A=\frac{3}{4}; \qquad \text{ctg } A=\frac{4}{3}.$$

Hállense también todas las funciones del ángulo B, y compárense los resultados

EJERCICIO 2. Calcular las funciones trigonométricas del ángulo B en el triángulo rectángulo en que $a=3$, $c=4$.

Solución. $b=\sqrt{c^2-a^2}=\sqrt{16-9}=\sqrt{7}.$

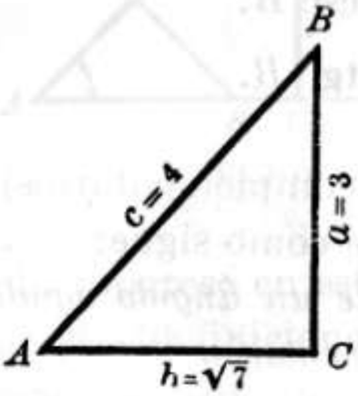


Fig. 4

$$\text{sen } B=\frac{\sqrt{7}}{4}=0{,}66; \; \csc B=\frac{4}{\sqrt{7}}=\frac{4\sqrt{7}}{7}=1{,}51;$$

$$\cos B=\frac{3}{4}=0{,}75; \quad \sec B=\frac{4}{3}=1{,}33;$$

$$\text{tg } B=\frac{\sqrt{7}}{3}=0{,}88; \; \text{ctg } B=\frac{3}{\sqrt{7}}=\frac{3\sqrt{7}}{7}=1{,}14.$$

Hállense también todas las funciones del ángulo A, y compárense los resultados.

EJERCICIO 3. Calcular las funciones trigonométricas del ángulo A en el triángulo rectángulo en que $a=2mn$, $b=m^2-n^2$.

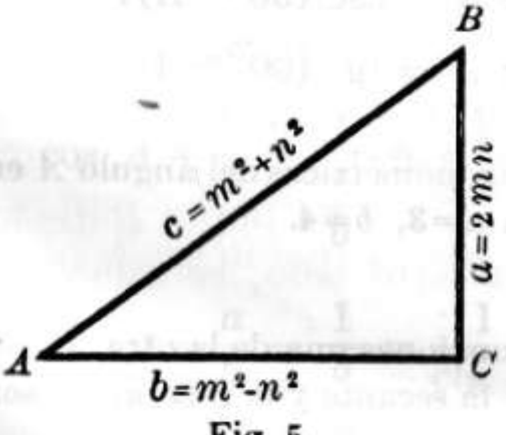


Fig. 5

Solución.

$$\begin{aligned} c &= \sqrt{a^2+b^2} \\ &= \sqrt{4m^2n^2+m^4-2m^2n^2+n^4} \\ &= \sqrt{m^4+2m^2n^2+n^4} \\ &= m^2+n^2. \end{aligned}$$

$$\text{sen } A=\frac{2mn}{m^2+n^2}; \qquad \cos A=\frac{m^2-n^2}{m^2+n^2};$$

$$\csc A = \frac{m^2+n^2}{2mn}; \qquad \sec A = \frac{m^2+n^2}{m^2-n^2};$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{2mn}{m^2-n^2}; \qquad \operatorname{ctg} A = \frac{m^2-n^2}{2mn}.$$

EJERCICIO 4. En un triángulo rectángulo sabemos que

$$\operatorname{sen} A = \frac{4}{5} \text{ y } a = 80;$$

hallar c.

Solución. De (1), del Artículo 4, tenemos:

$$\operatorname{sen} A = \frac{a}{c}.$$

Sustituyendo los valores dados de sen A y a, resulta

$$\frac{4}{5} = \frac{80}{c};$$

y despejando c, resulta: $c = 100$.

5. Funciones de 45°, 30° y 60°. Estos ángulos se presentan muy frecuentemente en los problemas que se resuelven usualmente por métodos trigonométricos. Es importante, en consecuencia, hallar los valores de las funciones trigonométricas de estos ángulos y aprenderse los resultados de memoria.

a. Funciones del ángulo de 45°. Consideremos (fig. 6) un triángulo rectángulo isósceles, como ABC. Entonces

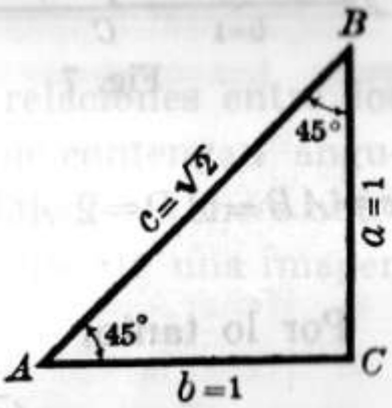


Fig. 6

$$\text{ángulo } A = \text{ángulo } B = 45°.$$

Como se puede tomar un triángulo cualquiera con tal que satisfaga la condición de ser rectángulo e isósceles, podemos asignar a los catetos la longitud que queramos.

Escojamos, como más sencillo, la unidad para las longitudes de los catetos, es decir, sean $a=1$ y $b=1$.

Entonces, $c=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{2}$, y obtenemos

$$\operatorname{sen}\ 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2};\qquad \csc\ 45^\circ=\sqrt{2};$$

$$\cos\ 45^\circ=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2};\qquad \sec\ 45^\circ=\sqrt{2};$$

$$\operatorname{tg}\ 45^\circ=1;\qquad \operatorname{ctg}\ 45^\circ=1.$$

b. ***Funciones de los ángulos de 30° y 60°.*** Dibujemos (fig. 7) un triángulo equilátero, como ABD Bajemos la perpendicular BC de B a AD, y consideremos el triángulo ABC, en que

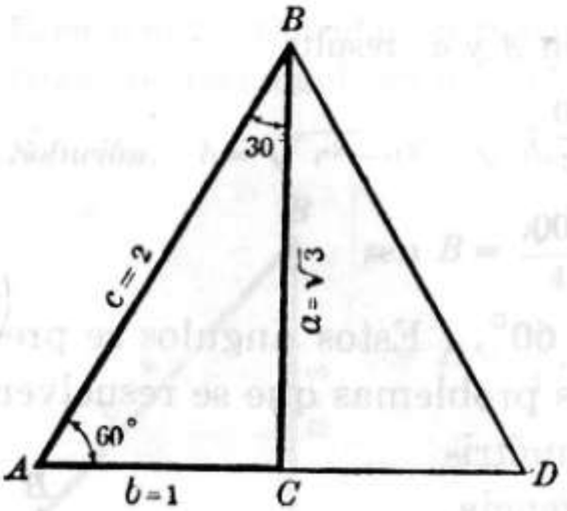


Fig. 7

$$\text{ángulo } A=60^\circ$$

$$\text{y}\quad \text{ángulo } ABC=30^\circ.$$

Si tomamos el lado más pequeño como unidad, es decir, si $b=1$, tendremos:

$$c=AB=AD=2\ AC=2\ b=2 \text{ y } a=\sqrt{c^2-b^2}=\sqrt{4-1}=\sqrt{3}.$$

Por lo tanto,

$$\operatorname{sen}\ 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2};\qquad \csc\ 60^\circ=\frac{2}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}}{3};$$

$$\cos\ 60^\circ=\frac{1}{2};\qquad \sec\ 60^\circ=2;$$

$$\operatorname{tg}\ 60^\circ=\sqrt{3};\qquad \operatorname{ctg}\ 60^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Análogamente, del mismo triángulo,

$$\operatorname{sen} 30^\circ = \frac{1}{2}; \qquad \csc 30^\circ = 2;$$

$$\cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}; \qquad \sec 30^\circ = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2\sqrt{3}}{3};$$

$$\operatorname{tg} 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3}}{3}; \quad \operatorname{ctg} 30^\circ = \sqrt{3}.$$

Escribiendo estos resultados en forma de tabla,* tenemos

Angulo	sen	cos	tg	ctg	sec	csc
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
45°	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	1	1	$\sqrt{2}$	$\sqrt{2}$
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$

El lector debe familiarizarse con las relaciones entre los elementos de los triángulos rectángulos que contengan ángulos de 45°, 30° y 60°. De esta manera, puede entonces obtener los valores de las funciones directamente de una imagen mental de estos triángulos rectángulos

* Para ayudar a la memoria observemos que los números de la primera columna (o de los senos) son, respectivamente, $\sqrt{1}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, divididos cada uno por 2.

La segunda columna (o de los cosenos) se forma invirtiendo el orden en la primera columna.

La tercera columna (o de las tangentes) se forma dividiendo los números de la primera columna por los números respectivos de la segunda columna.

Ejercicio. Dado un triángulo rectángulo en que $A=60°$, $a=100$; hallar c.

Solución. Como conocemos A (y por tanto, cualquier función de A), y la cosecante de A se da en función de a, que es conocida, y de c, que es lo que buscamos, podemos hallar c usando la fórmula (4) dada en el Artículo 4,

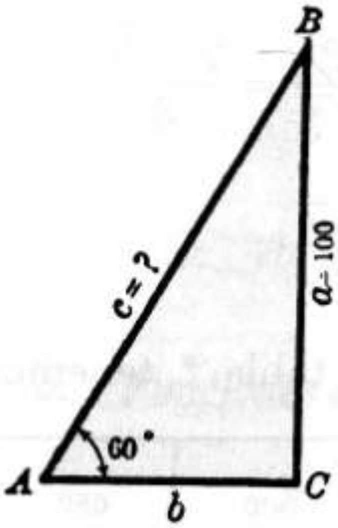


Fig. 8

$$\csc A = \frac{c}{a}.$$

Sustituyendo

$$a=100 \text{ y } \csc A = \csc 60° = \frac{2\sqrt{3}}{3}$$

de la tabla anterior, tenemos

$$c = \frac{200\sqrt{3}}{3} = 115{,}5.$$

Siguiendo el mismo método empleado para calcular c, demuéstrese que $b=57{,}7$. ¿Cuál es el valor de B?

PROBLEMAS

Los siguientes problemas se refieren solamente a triángulos rectángulos. Las soluciones se dan en el orden: seno, coseno, tangente.

1. Hallar las funciones trigonométricas del ángulo A, sabiendo que $a=8$, $b=15$.

Solución. sen $A=8/17$, cos $A=15/17$, tg $A=8/15$, etc.

2. Hallar las funciones del ángulo B, sabiendo que $b=5$, $c=13$.

3. Hallar las funciones del ángulo B, sabiendo que $a=0{,}6$, $b=0{,}8$.

Solución. sen $B=0{,}8$; cos $B=0{,}6$; tg $B=1{,}3$, etc.

4. Hallar las funciones del ángulo A, sabiendo que $b=2$, $c=\sqrt{11}$.

5. Hallar las funciones del ángulo B, sabiendo que $a=5$, $c=7$.

Solución. $\dfrac{2\sqrt{6}}{7}$, $\dfrac{5}{7}$, $\dfrac{2\sqrt{6}}{5}$, etc.

6. Hallar las funciones del ángulo A, sabiendo que $a=p$, $b=q$.

7. Hallar las funciones del ángulo A, sabiendo que

$$a=\sqrt{m^2+mn},\ c=m+n.$$

Solución. $\dfrac{\sqrt{m^2+mn}}{m+n},\ \dfrac{\sqrt{mn+n^2}}{m+n},\ \dfrac{1}{n}\sqrt{mn}$, etc.

8. Dados sen $A=3/5$, $c=200{,}5$; hallar a.

9. Dados cos $A=0{,}44$, $c=30{,}5$; hallar b.

Solución. 13,42.

10. Dados tg $A=1\tfrac{1}{3}$, $b=2\tfrac{7}{11}$; hallar c.

11. Dados tg $B=k$, $a=r$; hallar c.

Solución. $r\sqrt{k^2+1}$.

12. Si $b=2a$, hállense las funciones de A. ¿Por qué no aparecen en ellas ni a ni b?

13. La hipotenusa de un triángulo rectángulo es igual a tres veces la longitud de uno de sus catetos. Hallar las funciones del ángulo opuesto a este cateto. ¿Por qué en las soluciones no entra la longitud de este cateto?

Solución. $\dfrac{1}{3},\ \dfrac{2\sqrt{2}}{3},\ \dfrac{\sqrt{2}}{4}$, etc.

14. Si un cateto de un triángulo rectángulo es 16 y la cotangente del ángulo opuesto es $3/4$, calcular la longitud del otro cateto.

15. Dados $A=30°$, $a=25$; hallar c, B y b.

Solución. $c=50$, $B=60°$, $b=25\sqrt{3}$.

16. Dados $B=30°$, $c=48$; calcular b, A y a.

17. Dados $B=45°$, $b=20$; hallar c, A y a.

Solución. $c=20\sqrt{2}$, $A=45°$, $a=20$.

18. ¿Cuáles son los ángulos agudos de un triángulo rectángulo, si un cateto es $\sqrt{3}$ veces la longitud del otro?

19. En un triángulo rectángulo la longitud de la hipotenusa es $\sqrt{2}$ veces la longitud de uno de los catetos. ¿Cuáles son los ángulos agudos del triángulo?

Solución. 45°, 45°.

20. Si $\sec B = \frac{2}{3}\sqrt{3}$ y $c = 480$, calcular B, A, a y b.

21. Hallar el valor de $\operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A$, para $A = 30°$; $45°$; $60°$.

Solución. 1.

22. Demostrar que $\cos 60° = 2\cos^2 30° - 1$.

23. Demostrar que $\operatorname{tg} 30° = \dfrac{\sec 60°}{(\sec 60° + 1)\csc 60°}$.

24. Expresar cada una de las siguientes funciones como una función del ángulo complementario:

a. $\operatorname{tg} 30°$.
b. $\cos 20°$.
c. $\sec 81°$.
d. $\operatorname{sen} 33°33'$.
e. $\csc 72°17{,}4'$.

25. Demostrar que

a) $\operatorname{sen} 32° - \cos 58° = 0$.

b) $\csc 12° + \sec 78° = 2\csc 12° = 2\sec 78°$.

26. Hallar los ángulos agudos, A y B, de un triángulo rectángulo si $\operatorname{sen} 2A = \cos 3A$.

27. ¿Para qué ángulo agudo x es $\operatorname{tg}(30° - x) = \operatorname{ctg}(30° + 3x)$?

Solución. 15°.

6. Construcción de figuras; el transportador. Al comenzar el estudio de la Trigonometría es importante que el lector dibuje las figuras relacionadas con los problemas con la mayor exactitud posible. Esto no solamente conduce a una comprensión mejor de los problemas mismos, sino que también forma un concepto más claro del significado de las funciones trigonométricas y permite comprobar, de una manera aproximada, la exactitud de los resultados obtenidos. Para esto se necesitan solamente dos instrumentos que son una regla graduada y un transportador, instrumentos ampliamente conocidos del lector.

7. Tabla de valores de las funciones trigonométricas. En el Artículo 5 se calcularon las funciones trigonométricas de 30°, 45° y 60°. En tratados más avanzados se describe el método para calcular las funciones de cualquier ángulo agudo.

Más adelante explicaremos el uso de la tabla de la página 14 en la que figuran los valores de las funciones trigonométricas para cada grado desde 0° hasta 90° inclusive, con cuatro (o cinco) cifras exactas. Estos valores se llaman *valores naturales* de las funciones trigonométricas en contraposición a sus logaritmos.

Para buscar la función de un ángulo comprendido entre 0° y 45° inclusive, buscamos el ángulo en la primera columna de la izquierda. El valor buscado de la función se encontrará sobre la misma línea horizontal que el ángulo, y en la columna vertical encabezada por el nombre de la función. Así

$$\text{sen } 15^\circ = 0{,}2588,$$
$$\text{ctg } 41^\circ = 1{,}1504, \text{ etc.}$$

Análogamente, para hallar la función de un ángulo comprendido entre 45° y 90°, buscamos el ángulo en la primera columna de la derecha. El valor buscado de la función se encontrará sobre la misma línea horizontal que el ángulo, como en el caso anterior, pero en la columna vertical que tiene el nombre de la función en su parte inferior. Así,

$$\cos 64^\circ = 0{,}4384,$$
$$\sec 85^\circ = 11{,}474, \text{ etc.}$$

PROBLEMAS

Usando la tabla *A* de la página 14, hallar los valores de las siguientes funciones:

1. sen 28°. *Solución.* 0,4695. **2.** tg 42°.

3. cos 67°. *Solución* 0,3907. **4.** ctg 81°

Tabla *A*. Valores naturales de las funciones trigonométricas

Angulo	sen	cos	tg	ctg	sec	csc	
0°	0,0000	1,0000	0,0000	∞	1,0000	∞	90°
1°	0,0175	0,9998	0,0175	57,290	1,0002	57,299	89°
2°	0,0349	0,9994	0,0349	28,636	1,0006	28,654	88°
3°	0,0523	0,9986	0,0524	19,081	1,0014	19,107	87°
4°	0,0698	0,9976	0,0699	14,301	1,0024	14,336	86°
5°	0,0872	0,9962	0,0875	11,430	1,0038	11,474	85°
6°	0,1045	0,9945	0,1051	9,5144	1,0055	9,5668	84°
7°	0,1219	0,9925	0,1228	8,1443	1,0075	8,2055	83°
8°	0,1392	0,9903	0,1405	7,1154	1,0098	7,1853	82°
9°	0,1564	0,9877	0,1584	6,3138	1,0125	6,3925	81°
10°	0,1736	0,9848	0,1763	5,6713	1,0154	5,7588	80°
11°	0,1908	0,9816	0,1944	5,1446	1,0187	5,2408	79°
12°	0,2079	0,9781	0,2126	4,7046	1,0223	4,8097	78°
13°	0,2250	0,9744	0,2309	4,3315	1,0263	4,4454	77°
14°	0,2419	0,9703	0,2493	4,0108	1,0306	4,1336	76°
15°	0,2588	0,9659	0,2679	3,7321	1,0353	3,8637	75°
16°	0,2756	0,9613	0,2867	3,4874	1,0403	3,6280	74°
17°	0,2924	0,9563	0,3057	3,2709	1,0457	3,4203	73°
18°	0,3090	0,9511	0,3249	3,0777	1,0515	3,2361	72°
19°	0,3256	0,9455	0,3443	2,9042	1,0576	3,0716	71°
20°	0,3420	0,9397	0,3640	2,7475	1,0642	2,9238	70°
21°	0,3584	0,9336	0,3839	2,6051	1,0711	2,7904	69°
22°	0,3746	0,9272	0,4040	2,4751	1,0785	2,6695	68°
23°	0,3907	0,9205	0,4245	2,3559	1,0864	2,5593	67°
24°	0,4067	0,9135	0,4452	2,2460	1,0946	2,4586	66°
25°	0,4226	0,9063	0,4663	2,1445	1,1034	2,3662	65°
26°	0,4384	0,8988	0,4877	2,0503	1,1126	2,2812	64°
27°	0,4540	0,8910	0,5095	1,9626	1,1223	2,2027	63°
28°	0,4695	0,8829	0,5317	1,8807	1,1326	2,1301	62°
29°	0,4848	0,8746	0,5543	1,8040	1,1434	2,0627	61°
30°	0,5000	0,8660	0,5774	1,7321	1,1547	2,0000	60°
31°	0,5150	0,8572	0,6009	1,6643	1,1666	1,9416	59°
32°	0,5299	0,8480	0,6249	1,6003	1,1792	1,8871	58°
33°	0,5446	0,8387	0,6494	1,5399	1,1924	1,8361	57°
34°	0,5592	0,8290	0,6745	1,4826	1,2062	1,7883	56°
35°	0,5736	0,8192	0,7002	1,4281	1,2208	1,7434	55°
36°	0,5878	0,8090	0,7265	1,3764	1,2361	1,7013	54°
37°	0,6018	0,7986	0,7536	1,3270	1,2521	1,6616	53°
38°	0,6157	0,7880	0,7813	1,2799	1,2690	1,6243	52°
39°	0,6293	0,7771	0,8098	1,2349	1,2868	1,5890	51°
40°	0,6428	0,7660	0,8391	1,1918	1,3054	1,5557	50°
41°	0,6561	0,7547	0,8693	1,1504	1,3250	1,5243	49°
42°	0,6691	0,7431	0,9004	1,1106	1,3456	1,4945	48°
43°	0,6820	0,7314	0,9325	1,0724	1,3673	1,4663	47°
44°	0,6947	0,7193	0,9657	1,0355	1,3902	1,4396	46°
45°	0,7071	0,7071	1,0000	1,0000	1,4142	1,4142	45°
	cos	sen	ctg	tg	csc	sec	Angulo

5. sec 3°. *Solución.* 1,0014. **6.** tg 73°.

7. csc 46°. *Solución.* 1,3902. **8.** cos 46°.

9. Por observación de la tabla A, verificar el teorema del Artículo 4, sobre las cofunciones.

10. La hipotenusa de un triángulo rectángulo es mayor que cualquiera de sus catetos. Tomando en cuenta este hecho en la definición de las funciones trigonométricas, dígase cuáles funciones son siempre menores que 1. ¿Cuáles funciones son siempre mayores que 1? ¿Cuáles funciones pueden ser ya sea menores que 1 ó mayores que 1? Comprobar las respuestas observando la tabla A.

11. Por observación de la tabla A, decir cuáles son las funciones que aumentan en valor a medida que el ángulo crece de 0° a 90°. ¿Cuáles funciones decrecen?

12. Construir con un transportador los siguientes ángulos: 10°; 60°; 90°; 35°; 57°; 135°; 111°; 162°.

13. Dibujar un triángulo y medir con un transportador sus tres ángulos. Comprobar las medidas obtenidas sumando los ángulos.

14. Expresar en forma decimal, con cuatro cifras, los valores de las funciones de 30°, 45°, y 60°, y comprobar los resultados con la tabla A.

15. Construir con un transportador un triángulo rectángulo en el cual el ángulo $A = 35°$ y $b = 3{,}5$ cm. Medir a y calcular el valor de $\frac{a}{b}$ aproximado hasta las décimas. Comprobar el resultado obtenido con el dado en la tabla A.

8. Generación de ángulos. Después del estudio precedente de las funciones trigonométricas de un ángulo agudo, procedamos a estudiar las funciones trigonométricas de un ángulo cualquiera.

La noción de ángulo, como se presenta usualmente en Geometría elemental, no es suficiente para los usos de la Trigonometría, en la que tendremos que tratar con ángulos positivos y negativos de cualquier magnitud. Un nuevo concepto de ángulo puede formarse como sigue:

Un ángulo puede considerarse como engendrado por una recta que coincide primero con uno de los lados del ángulo, gira después en torno del vértice, y finalmente coincide con el otro lado.

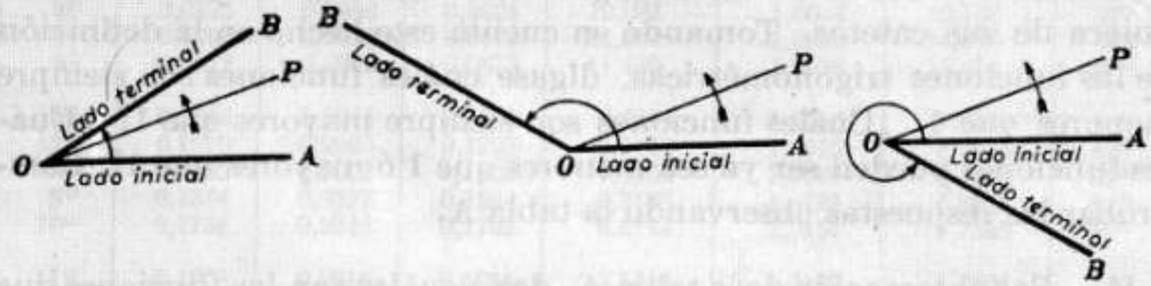


Fig. 9

Esta recta se llama *recta generatriz* del ángulo. En su primera posición se dice que coincide con el *lado inicial* del ángulo. y en su posición final con el *lado terminal* o *lado final* del ángulo.

Así, el ángulo AOB (fig. 9) está engendrado por la recta OP que gira en torno de O, en la dirección indicada por la flecha, del lado inicial OA al lado terminal OB.

9. Angulos positivos y negativos. En la figura 9 los ángulos fueron engendrados por la rotación de la recta generatriz en *sentido contrario al de las manecillas de un reloj;* los matemáticos han acordado llamar a tales ángulos *positivos*. En la siguiente figura (fig. 10) aparecen tres ángulos que

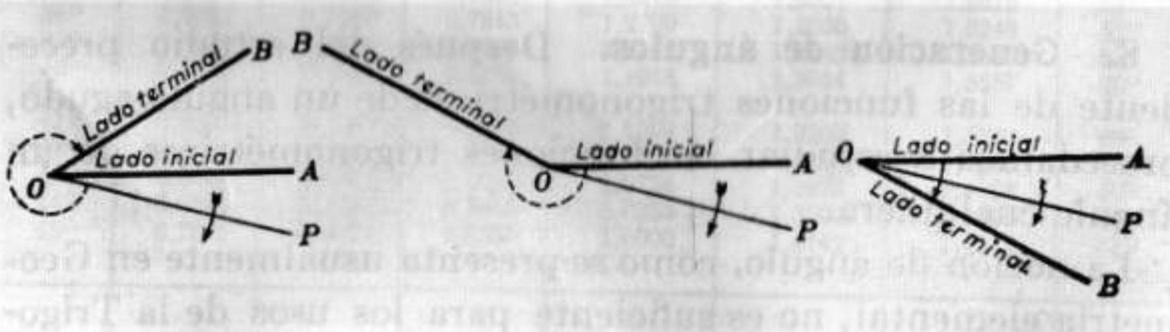


Fig. 10

tienen los mismos lados inicial y final que los anteriores, pero los *ángulos son diferentes* ya que han sido engendrados por la rotación de la recta generatriz en el *sentido de las manecillas de un reloj;* se dice que tales ángulos son *negativos*.

Los arcos que llevan las flechas se dibujarán con línea continua cuando indiquen un ángulo positivo, y con línea punteada cuando indiquen un ángulo negativo.

10. Angulos de cualquier magnitud. Aun cuando dos ángulos tengan los mismos lados inicial y final, y hayan sido engendrados por una rotación en el mismo sentido, pueden ser diferentes en magnitud. Así, para obtener un ángulo recto, la recta generatriz gira hasta la posición OB, como aparece en la figura 11. Si, en cambio, la recta generatriz se

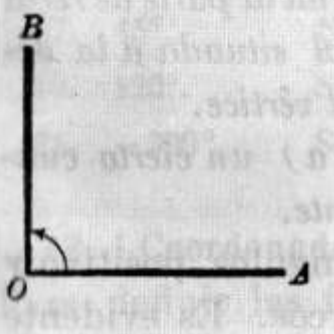


Fig 11

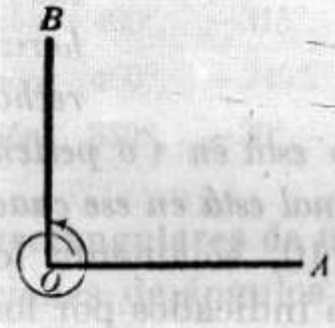


Fig. 12

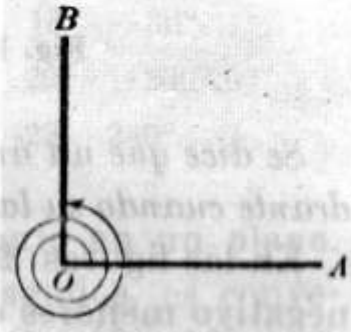


Fig. 13

detiene en la posición OB después de dar una revolución completa a partir de OB, como se indica en la figura 12, entonces hemos engendrado un ángulo cuya magnitud es de cinco ángulos rectos; o si fueron dos las revoluciones hechas antes de detenerse, como se representa en la figura 13, entonces hemos engendrado un ángulo de magnitud igual a nueve ángulos rectos, y así sucesivamente. Esto muestra también que los ángulos positivos pueden tener una magnitud cualquiera. Análogamente, se puede ver que dando una o varias revoluciones completas en el sentido de las manecillas, los ángulos negativos pueden tener también cualquier magnitud.

Así, la manecilla de los minutos en un reloj engendra cada hora un ángulo que vale -4 ángulos rectos, y un ángulo igual a -96 ángulos rectos cada día.

11. Los cuatro cuadrantes. Tomando como origen el vértice del ángulo que se considere, se acostumbra a dividir el plano en cuatro partes llamadas *cuadrantes*, mediante dos rectas perpendiculares. Así, si O es el vértice, los diferentes cuadrantes se nombran como está indicado en la figura 14, *considerándose como lado inicial la parte de recta horizontal situada a la derecha del vértice.*

Fig. 14

Se dice que un ángulo está en (o pertenece a) un cierto cuadrante cuando su lado final está en ese cuadrante.

En las figuras 9 y 10, solamente los ángulos positivo y negativo menores están indicados por los arcos. Es evidente que el número de ángulos positivos y negativos que tienen los mismos lados inicial y terminal es ilimitado. Los siguientes ejercicios ilustrarán este concepto.

EJERCICIO 1. Demostrar que $1\,000°$ está en el cuarto cuadrante.

Solución. $1000° = 720° + 280° = 2\times360° + 280°$. Por tanto, la recta generatriz da dos revoluciones completas en la dirección positiva y recorre $280°$ más, y el lado final de $280°$ está en el cuarto cuadrante.

EJERCICIO 2. Demostrar que $-568°$ está en el segundo cuadrante.

Solución. $-568° = -360° - 208°$. Por tanto, la recta generatriz da una revolución completa en la dirección negativa y recorre $208°$ más en esa misma dirección, y el lado final de $-208°$ está en el segundo cuadrante.

PROBLEMAS

¿En qué cuadrante está cada uno de los siguientes ángulos?

1. 225°.	*Solución.* III.		**2.** 120°.
3. −315°.	*Solución,* I.		**4.** −240°.
5. 651°.	*Solución.* IV.		**6.** −150°.
7. −75°.	*Solución.* IV.		**8.** −1 200°.
9. 540°.	*Solución.* Entre II y III.		**10.** 420°.
11. −910°.	*Solución.* II.		**12.** −300°.
13. 1 500°.	*Solución.* I.		**14.** 810°.
15. −540°.	*Solución.* Entre II y III.		**16.** 537°.

Dar un ángulo positivo y uno negativo que tengan cada uno el mismo lado inicial y el mismo lado terminal que cada uno de los siguientes ángulos.

17. 45°.	*Solución.*	405°, −315°.	**18.** −30°.
19. 120°.	*Solución.*	480°, −240°.	**20.** −200°.
21. −390°.	*Solución.*	330°, −30°.	**22.** 340°.

12. Coordenadas rectangulares de un punto en un plano. Para definir las funciones de ángulos no agudos, es conveniente introducir la noción de *coordenadas*. Sea (fig. 15) $X'X$ una recta horizontal e $Y'Y$ una recta perpendicular a ella en el punto O. Cualquier punto del plano de estas rectas (como P) está determinado por dos números que miden en magnitud y signo su distancia a cada una de las perpendiculares $X'X$ e $Y'Y$. Su distancia de $Y'Y$ (como $NP=a$) se llama *abscisa* del punto, y su distancia de $X'X$ (como $MP=b$) se llama *ordenada* del punto.

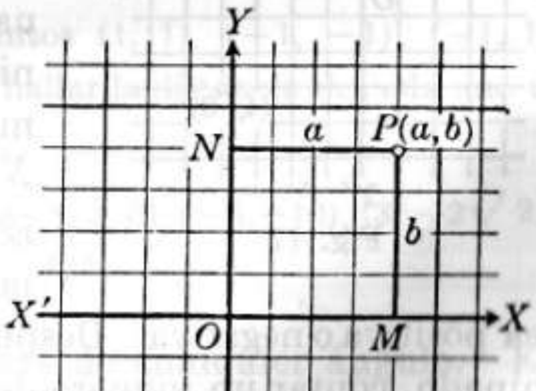


Fig. 15

Las abscisas medidas hacia la *derecha de $Y'Y$* son *positivas*.
Las abscisas medidas hacia la *izquierda de $Y'Y$* son *negativas*.
Las ordenadas medidas hacia *arriba de $X'X$* son *positivas*.
Las ordenadas medidas hacia *abajo de $X'X$* son *negativas*.

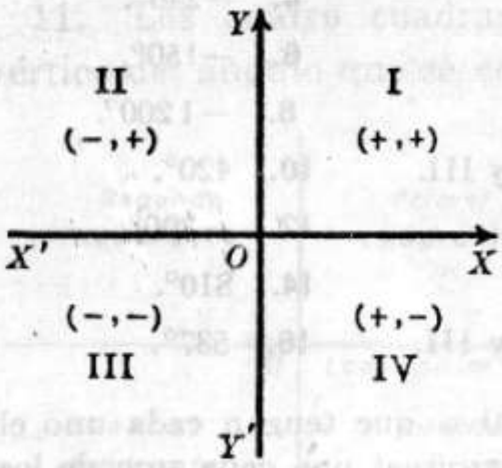


Fig. 16

El conjunto formado por la abscisa y la ordenada se llama *coordenadas* del punto. El punto P, por ejemplo, dado por sus coordenadas a y b, se designa por el símbolo $P(a, b)$.

Las rectas $X'X$ e $Y'Y$ se llaman *ejes de coordenadas*, siendo $X'X$ el *eje de las abscisas* o *eje X* o *eje de las x*, e $Y'Y$ el *eje de las ordenadas* o *eje Y* o *eje de las y;* el punto O se llama *origen de coordenadas*.

Los ejes de coordenadas dividen al plano en cuatro regiones llamadas cuadrantes (igual que en el artículo anterior); en la figura 16 se indican los signos de las coordenadas en los diferentes cuadrantes.

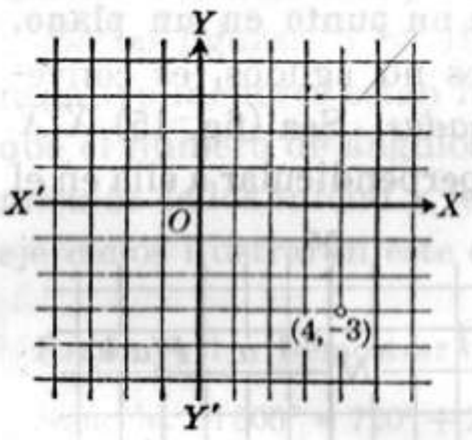


Fig. 17

Trazar un punto es localizar su posición a partir de sus coordenadas. La manera más conveniente de hacerlo es contar primero a partir de O a lo largo de $X'X$ un número de divisiones igual a la abscisa, a la derecha o a la izquierda según que la abscisa sea positiva o negativa. Después, a partir del punto así determinado, contar un número de divisiones igual a la ordenada, hacia arriba o hacia abajo según que la ordenada sea positiva o negativa. El trazo de puntos se simplifica mucho usando *papel cuadriculado* en el que se ha dividido el plano en cuadrados iguales, siendo los lados de estos cuadrados paralelos a los ejes. Así, para trazar el punto (4, —3), se cuentan cuatro divisiones a partir de O sobre el eje X hacia la derecha, y después tres divisiones hacia abajo, a partir del punto así determinado, sobre una recta paralela al eje Y. Análogamente las siguientes figuras muestran los puntos (−2, 3), (—3, —4), (0,3).

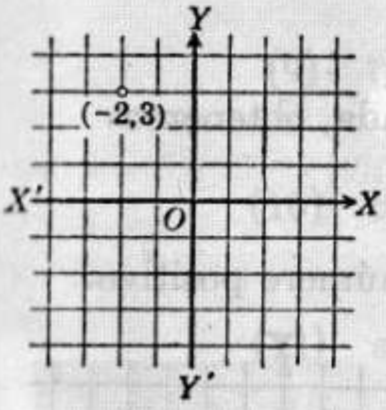


Fig. 18

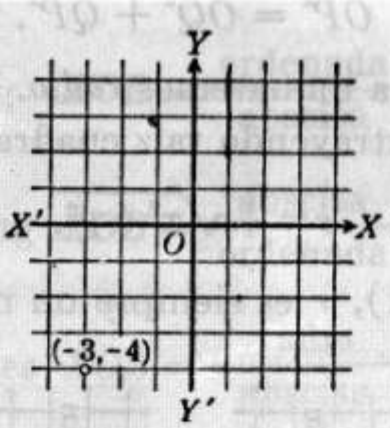


Fig. 19

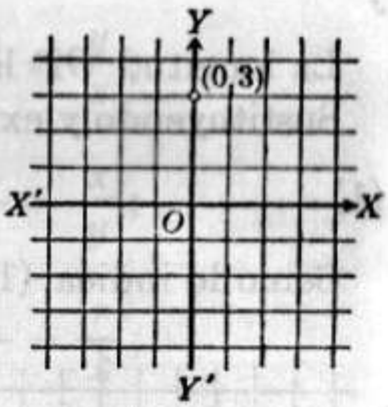


Fig. 20

PROBLEMAS

1. a. Trazar con exactitud los puntos (5, 4), (−3, 4), (−2, −4), (5, −1), (6, 0), (−5, 0), (0, 4), (0, −3).

b. ¿Cuál es la distancia de cada punto al origen?

Solución. $\sqrt{41}$, 5, $2\sqrt{5}$, etc.

2. Trazar con exactitud los puntos (1, 1), (−1, −1), (−1, 1), ($\sqrt{3}$, 1), ($\sqrt{3}$, −1), (−$\sqrt{3}$,−1), y hallar la distancia de cada uno de ellos al origen.

3. Trazar con exactitud los puntos ($\sqrt{2}$, 0), (−5, −10), (3, −2$\sqrt{2}$), (10, 3), (0, 0), (0, −$\sqrt{5}$), (3, −5), (−4, 5).

13. Funciones trigonométricas de cualquier ángulo. En el Artículo 4 se definieron las seis funciones trigonométricas para ángulos agudos. Ahora, en cambio, vamos a dar unas definiciones que se pueden aplicar a cualquier ángulo, y que concuerdan con las definiciones ya dadas para los ángulos agudos.

Tomemos el origen de coordenadas como el vértice del ángulo y el lado inicial como eje X. Dibujemos un ángulo XOB en cada cuadrante.

Sea P un punto cualquiera del lado final OB del ángulo y sean (x, y) sus coordenadas. En todas las figuras, se verifica

$$OQ = x,\ QP = y,\ OP = r,$$

y

$$\overline{OP}^2 = \overline{OQ}^2 + \overline{QP}^2.$$

La longitud OP la llamaremos *radio*.

Sustituyendo y extrayendo raíz cuadrada, obtenemos

$$r = +\sqrt{x^2 + y^2}. \tag{1}$$

Como lo indica (1), r es siempre un número positivo.

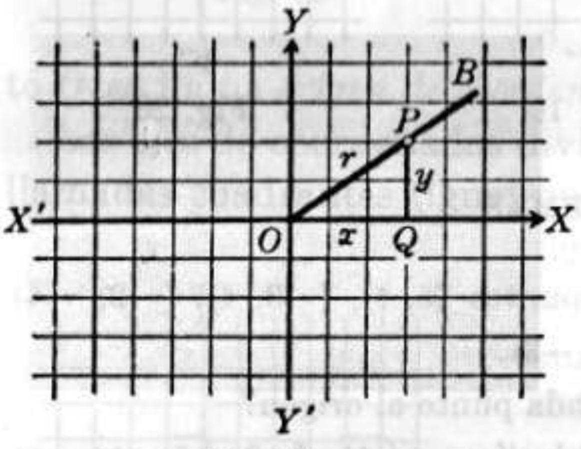


Fig. 21

Angulo en el primer cuadrante

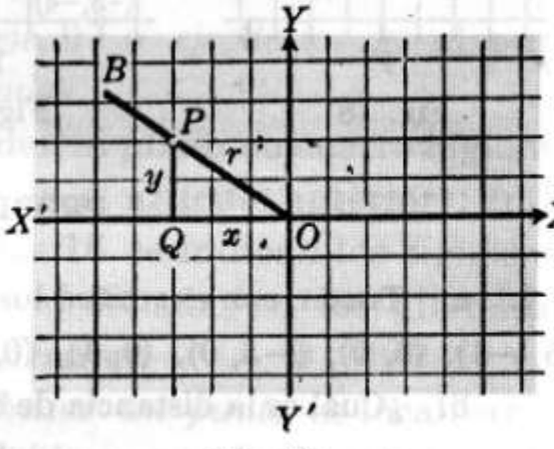


Fig. 22

Angulo en el segundo cuadrante

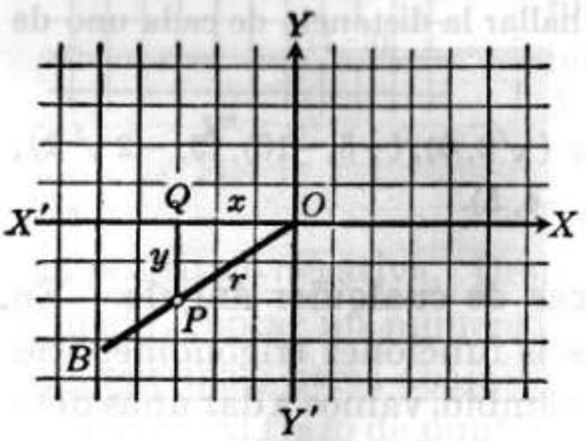


Fig. 23

Angulo en el tercer cuadrante

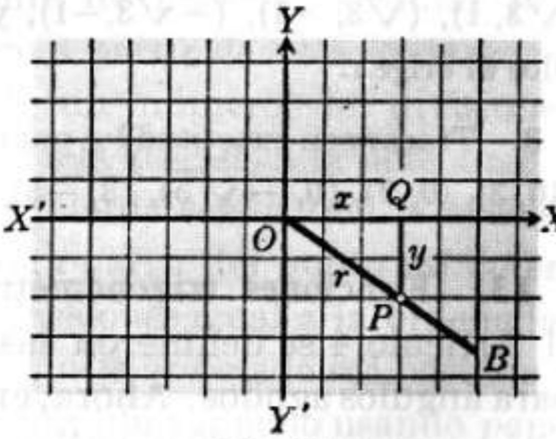


Fig. 24

Angulo en el cuarto cuadrante

Designando el ángulo en cada figura por XOB, las definiciones de las funciones son:

$$\text{(7)} \quad \operatorname{sen} XOB = \frac{\text{ordenada}}{\text{radio}} = \frac{y}{r};$$

$$\text{(8)} \quad \cos XOB = \frac{\text{abscisa}}{\text{radio}} = \frac{x}{r};$$

$$\text{(9)} \quad \operatorname{tg} XOB = \frac{\text{ordenada}}{\text{abscisa}} = \frac{y}{x};$$

$$\text{(10)} \quad \operatorname{ctg} XOB = \frac{\text{abscisa}}{\text{ordenada}} = \frac{x}{y};$$

$$\text{(11)} \quad \sec XOB = \frac{\text{radio}}{\text{abscisa}} = \frac{r}{x};$$

$$\text{(12)} \quad \csc XOB = \frac{\text{radio}}{\text{ordenada}} = \frac{r}{y}.$$

Estas definiciones aplicadas al ángulo XOB en el primer cuadrante concuerdan con las dadas en el Artículo 4. Dos cosas deben observarse en las definiciones anteriores:

1. El valor de cada una de las razones anteriores es *independiente de la posición* de P sobre OB. (Se demuestra como en el Artículo 4.)

2. Los valores de las funciones anteriores dependen en cualquier caso *solamente de la posición del lado final* OB (*siendo fijo el lado inicial* OX). Es decir, tomando OX como lado inicial común, para todos los ángulos que tengan el mismo lado final OB las funciones trigonométricas tendrán los mismos valores. Así, por ejemplo, los ángulos $40°$, $400°$, $-320°$, tienen las mismas funciones. Las definiciones **(7)** a **(12)** son fundamentales y deben aprenderse de memoria.

Otras tres funciones usadas son el seno verso (vers), el coseno verso, (cov), y la mitad del seno verso. Estas están definidas por las igualdades seno verso $XOB = 1 - \cos XOB$; coseno verso $XOB = 1 - \text{sen } XOB$; mitad del seno verso $XOB = \frac{1}{2}(1 - \cos XOB) = \frac{1}{2}$ seno verso XOB.

De las definiciones **(7)** a **(12)**, se desprende, como en el Artículo 4, que

el seno es el recíproco de la cosecante;
la tangente es el recíproco de la cotangente;
el coseno es el recíproco de la secante.

14. Signos algebraicos de las funciones trigonométricas. Teniendo en cuenta la regla dada para los signos algebraicos de las abscisas y ordenadas de los puntos dadas en el Artículo 12, y recordando que la distancia OP $(=r)$ es siempre positiva, vemos de inmediato, de las definiciones de las funciones trigonométricas dadas en el último artículo, que

En el ***primer cuadrante todas las funciones*** *son positivas.*

En el ***segundo cuadrante*** *el* ***sen*** *y la* ***csc*** *son positivas; las restantes son negativas.*

En el ***tercer cuadrante*** *la* ***tg*** *y la* ***ctg*** *son positivas; las restantes son negativas.*

En el ***cuarto cuadrante*** *el* ***cos*** *y la* ***sec*** *son positivas; las restantes son negativas.*

Estos resultados se resumen en la siguiente tabla, que debe aprenderse de memoria.

Función	Cuadrante I	Cuadrante II	Cuadrante III	Cuadrante IV
Seno Cosecante }	+	+	−	−
Coseno Secante }	+	−	−	+
Tangente Cotangente }	+	−	+	−

15. Aplicaciones. En el Artículo 5 se obtuvieron las funciones trigonométricas de los ángulos de 30°, 45° y 60°. A partir de estos valores se pueden deducir las funciones trigonométricas de muchos ángulos.

EJERCICIO 1. Hallar las funciones trigonométricas de los ángulos de 150°, 210° y 330°.

Solución. Observamos que (véase la figura 25)

$$\angle XOB_2 = 150° = 180° - 30° = 180° - \angle XOB_1,$$

$$\angle XOB_3 = 210° = 180° + 30° = 180° + \angle XOB_1,$$

$$\angle XOB_4 = 330° = 360° - 30° = 360° - \angle XOB_1.$$

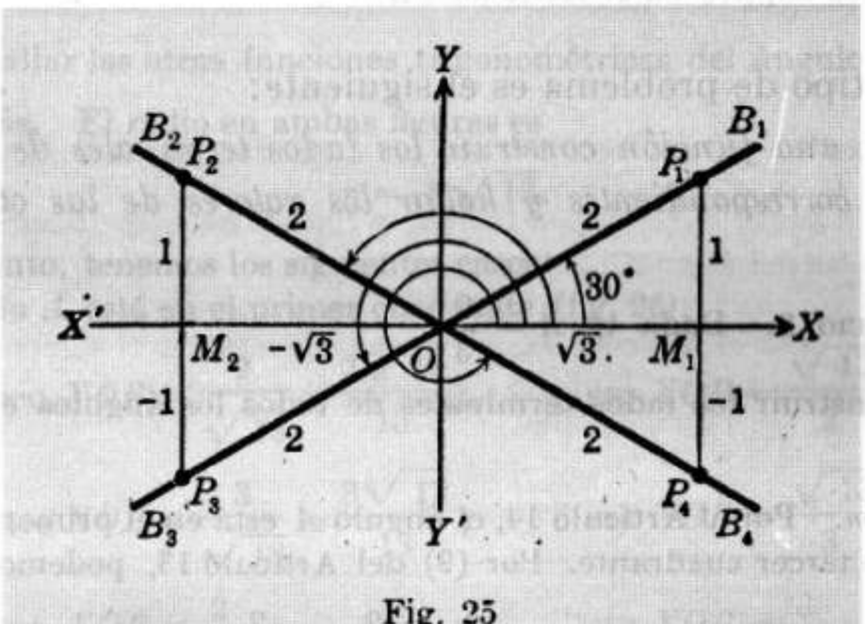


Fig. 25

Tomemos $OP_1 = OP_2 = OP_3 = OP_4 = 2$. Entonces las razones trigonométricas obtenidas de los triángulos OM_1P_1, OM_2P_2, OM_2P_3, OM_1P_4 son iguales. (¿Porqué?)

Según lo explicado en el Artículo 5, las coordenadas de los puntos P_1, P_2, P_3, P_4 son

$$P_1(\sqrt{3},1),\ P_2(-\sqrt{3},1),\ P_3(-\sqrt{3},-1),\ P_4(\sqrt{3},-1).$$

Entonces por (7) a (12) (Art. 13) hallamos la tabla siguiente:

Angulo	sen	cos	tg	ctg	sec	csc
30°	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
150°	$\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	2
210°	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\sqrt{3}$	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-2
330°	$-\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	$-\sqrt{3}$	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$	-2

Los valores en cada columna difieren solamente en el signo, y este signo se determina por el cuadrante en que el ángulo está colocado tal como se explicó en el Artículo 14.

Otro tipo de problema es el siguiente:

Dada una función construir los lados terminales de todos los ángulos correspondientes y hallar los valores de las otras funciones.

EJERCICIO 2. Dada $\operatorname{tg} A = \frac{2}{3}$.

a. Construir los lados terminales de todos los ángulos correspondientes.

Solución. Por el Artículo 14, el ángulo A está en el primer cuadrante o en el tercer cuadrante. Por (9) del Artículo 13, podemos escribir

$$\operatorname{tg} A = \frac{y}{x} = \frac{2}{3} = \frac{-2}{-3}.$$

Por tanto, el lado terminal de A, en el primer cuadrante, pasa por $x=3$, $y=2$, como se muestra en la figura 26.

El lado terminal de A en el tercer cuadrante pasa por

$$x=-3,\ y=-2,$$

como se indica en la figura 27.

Los ángulos correspondientes son XOB en la figura 26 y XOB' en la figura 27.

Es evidente que, correspondiendo a cada figura, hay un número infinito de ángulos positivos y negativos que difieren en un múltiplo de 360° y que satisfacen la condición dada.

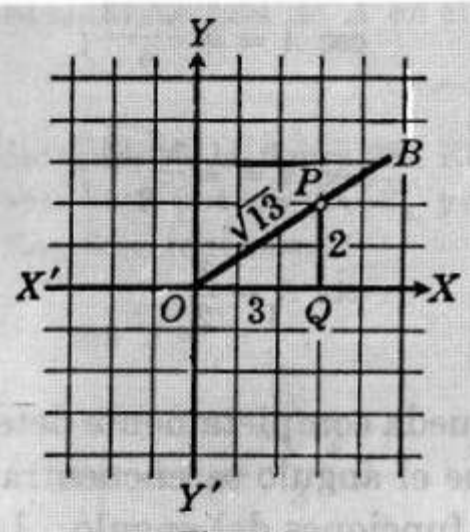


Fig. 26

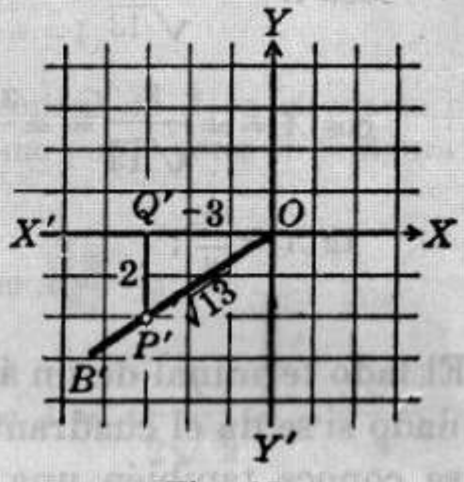


Fig. 27

b. Hallar las otras funciones trigonométricas del ángulo A.

Solución. El radio en ambas figuras es

$$r = +\sqrt{13}.$$

Por tanto, tenemos los siguientes casos:

Cuando A está en el primer cuadrante (fig. 26),

$$\operatorname{sen} XOB = \frac{2}{\sqrt{13}} = \frac{2\sqrt{13}}{13}; \qquad \csc XOB = \frac{\sqrt{13}}{2};$$

$$\cos XOB = \frac{3}{\sqrt{13}} = \frac{3\sqrt{13}}{13}; \qquad \sec XOB = \frac{\sqrt{13}}{3};$$

$$\operatorname{tg} XOB = \frac{2}{3}; \qquad \operatorname{ctg} XOB = \frac{3}{2}.$$

Cuando A está en el tercer cuadrante (fig. 27),

$$\operatorname{sen} XOB' = -\frac{2}{\sqrt{13}} = -\frac{2\sqrt{13}}{13}; \qquad \csc XOB' = -\frac{\sqrt{13}}{2};$$

$$\cos XOB' = -\frac{3}{\sqrt{13}} = -\frac{3\sqrt{13}}{13}; \qquad \sec XOB' = -\frac{\sqrt{13}}{3};$$

$$\operatorname{tg} XOB' = \frac{2}{3}. \qquad \operatorname{ctg} XOB' = \frac{3}{2}.$$

O, designando por A un ángulo que satisface la condición dada, podemos escribir los resultados en una forma más condensada, como sigue:

$$\operatorname{sen} A = \pm\frac{2}{\sqrt{13}} = \pm\frac{2\sqrt{13}}{13}; \qquad \csc A = \pm\frac{\sqrt{13}}{2};$$

$$\cos A = \pm\frac{3}{\sqrt{13}} = \pm\frac{3\sqrt{13}}{13}; \qquad \sec A = \pm\frac{\sqrt{13}}{3};$$

$$\operatorname{tg} A = \frac{2}{3}; \qquad \operatorname{ctg} A = \frac{3}{2}.$$

El lado terminal de un ángulo queda completamente determinado si se da el cuadrante en que el ángulo se encuentra y si se conoce también una de las funciones del ángulo. Las otras funciones se encuentran entonces fácilmente, tal y como hemos visto en el ejercicio 2.

EJERCICIO 3. Dado $\operatorname{sen} A = -\frac{1}{3}$, construir los lados terminales de todos los ángulos correspondientes, y hallar las otras funciones trigonométricas del ángulo.

Solución. Por el Artículo 14, el ángulo A está en el tercero o en el cuarto cuadrante. Por (7) (Art. 13), podemos escribir

$$\operatorname{sen} A = \frac{y}{r} = \frac{-1}{3}.$$

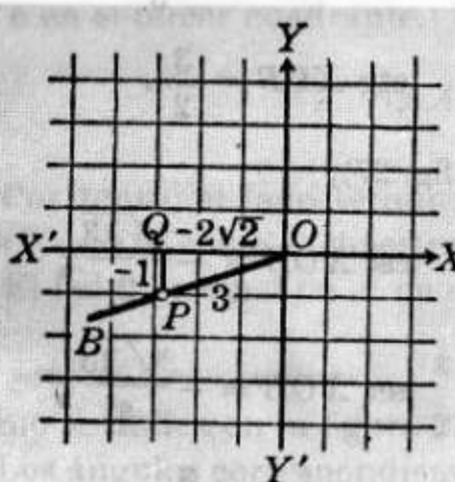


Fig. 28

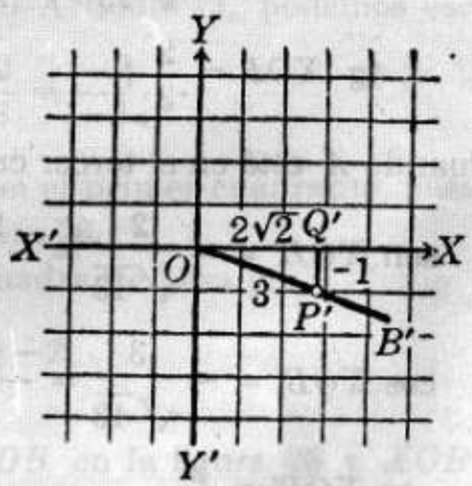


Fig 29

Tomemos $y=-1$, $r=3$. Ahora, $x^2=r^2-y^2$. Por tanto,

$$x^2=9-1=8 \text{ y } x=\pm 2\sqrt{2}.$$

El lado terminal de A en el tercer cuadrante pasa por

$$x=-2\sqrt{2}, \quad y=-1,$$

como muestra la figura 28. El lado terminal de A en el cuarto cuadrante pasa por $x=2\sqrt{2}$, $y=-1$, como puede verse en la figura 29.

Entonces tenemos,

$$\text{sen } A = -\frac{1}{3}; \qquad \csc A = -3;$$

$$\cos A = \pm\frac{2\sqrt{2}}{3}; \qquad \sec A = \pm\frac{3}{2\sqrt{2}} = \pm\frac{3\sqrt{2}}{4};$$

$$\text{tg } A = \pm\frac{1}{2\sqrt{2}} = \pm\frac{\sqrt{2}}{4}; \quad \text{ctg } A = \pm 2\sqrt{2}.$$

Ejercicio 4. Sabiendo que $\text{ctg } x = \frac{m}{n}$, calcular todas las otras funciones trigonométricas de x.

Solución. Aquí podemos escribir, por (**10**) (Art. 13),

$$\text{ctg } x = \frac{m}{n} = \frac{-m}{-n} = \frac{\text{abscisa}}{\text{ordenada}},$$

y

$$\text{radio} = \sqrt{m^2+n^2}.$$

Por tanto, un lado terminal está determinado por el origen y (m, n), y el otro lado final por el origen y $(-m, -n)$. Por lo tanto,

$$\text{sen } x = \pm\frac{n}{\sqrt{m^2+n^2}}; \qquad \csc x = \pm\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{n};$$

$$\cos x = \pm\frac{m}{\sqrt{m^2+n^2}}; \qquad \sec x = \pm\frac{\sqrt{m^2+n^2}}{m};$$

$$\text{tg } x = \frac{n}{m}; \qquad \text{ctg } x = \frac{m}{n}.$$

PROBLEMAS

Hallar las funciones del ángulo XOP para las siguientes posiciones de P (siendo OX el lado inicial en cada caso). Expresar las soluciones como fracciones comunes en la forma más simple. Las soluciones están dadas en el orden seno, coseno, tangente.

1. $(-4, 3)$. *Solución.* $\frac{3}{5}$, $-\frac{4}{5}$, $-\frac{3}{4}$, etc. **2.** $(-12, 9)$.

3. $(-1, -2)$. *Solución.* $-\frac{2\sqrt{5}}{5}$, $-\frac{\sqrt{5}}{5}$, 2, etc. **4.** $(12, -5)$.

5. $(1, 1)$. *Solución.* $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $\frac{\sqrt{2}}{2}$, 1, etc. **6.** $(-15, 8)$.

7. $(-1, -1)$. *Solución.* $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, 1, etc. **8.** $(-8, -6)$.

9. $(-6, 8)$. *Solución.* $\frac{4}{5}$, $-\frac{3}{5}$, $-\frac{4}{3}$, etc. **10.** $(3, -5)$.

11. ¿Qué función tiene, para todos los valores de A, el mismo signo **a**) que sen A; **b**) que tg A; **c**) que sec A?

¿En qué cuadrante está A para cada una de las siguientes condiciones?

12. sen A y tg A ambas positivas.

13. sen A positivo, cos A negativo. *Solución.* II.

14. tg A positiva, sec A negativa.

15. cos A negativo, ctg A negativa. *Solución.* II.

16. cos A positivo, sen A negativo.

Determinar el signo de cada una de las siguientes funciones:

17. sen 160°. **19.** tg 200°. **21.** ctg 460°.

18. cos (−20°). **20.** sec (−110°). **22.** csc (−320°).

23. Siguiendo el método del ejercicio 1, del Artículo 15, obtener una tabla de valores de las funciones de 60°, 120°, 240° y 300°. ¿Qué se observa acerca de los valores que aparecen en una cualquiera de las columnas en particular?

Solución.

Angulo	sen	cos	tg	ctg	sec	csc
60°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
120°	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	-2	$\frac{2\sqrt{3}}{3}$
240°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\sqrt{3}$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	-2	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$
300°	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	$-\sqrt{3}$	$-\frac{\sqrt{3}}{3}$	2	$-\frac{2\sqrt{3}}{3}$

24. Construir una tabla de valores de las funciones de 45°, 135°, 225° y 315°.

25. ¿Qué ángulo positivo menor que 360° tiene el mismo lado terminal que $-30°$? ¿Cuáles son los valores de las funciones de $-30°$?

Solución. 330°; $-\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, etc.

26. Calcular los valores de las funciones de $-45°$.

Hallar los valores de las funciones de los siguientes ángulos. Dibujar en cada caso una figura indicando sobre ella por una flecha la magnitud y dirección del ángulo, y por números los valores de x, y, r.

27. $-60°$. *Solución.* $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{1}{2}$, $-\sqrt{3}$, etc. **28.** $-210°$.

29. $-135°$. *Solución.* $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, 1, etc. **30.** 420°.

31. $-390°$. *Solución.* $-\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, etc. **32.** 585°.

Hallar el valor de $\operatorname{sen}^2 A+\cos^2 A$ para cada uno de los siguientes valores de A:

33. 120°. *Solución.* 1. **34.** 225°.

35. 210°. *Solución.* 1. **36.** −45°.

37. Demostrar que $\operatorname{sen} 150° \cos 240° + \cos 150° \operatorname{sen} 240° = \frac{1}{2}$.

38. Demostrar que $\cos(-135°)\cos(-225°)$

$$-\operatorname{sen}(-135°)\operatorname{sen}(-225°)=1.$$

Hallar el valor de cada una de las siguientes expresiones:

39. $4 \operatorname{sen}^2 210° + 3 \sec^2 135° - 2 \operatorname{ctg}^2 150°$. *Solución.* 1.

40. $2 \csc^2 30° + 2 \cot^2 240° - 6 \operatorname{sen}^2 (-225°)$.

41. $\dfrac{\operatorname{tg} 120° + \operatorname{tg}(-150°)}{1 - \operatorname{tg} 120° \operatorname{tg}(-150°)}$. *Solución.* $-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

42. $\dfrac{\operatorname{ctg}^2(-120°) - 1}{2 \operatorname{ctg}(-120°)}$.

Dar los valores de A comprendidos entre 0° y 360° que satisfacen a cada una de las siguientes ecuaciones:

43. $\operatorname{sen} A = \frac{1}{2}$. *Solución.* 30°, 150°. **44.** $\cos A = -\frac{1}{2}$.

45. $\operatorname{tg} A = 1$. *Solución.* 45°, 225°. **46.** $\operatorname{ctg} A = -\sqrt{3}$.

47. $\sec A = 2$. *Solución.* 60°, 300°. **48.** $\csc A = -2$.

49. $\operatorname{sen} A = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$. *Solución.* 240°, 300°. **50.** $\operatorname{ctg} A = -1$.

51. $\csc A = -\dfrac{2\sqrt{3}}{2}$. *Solución.* 240°, 300°. **52.** $\operatorname{ctg} A = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$.

53. $2 \operatorname{sen} A + 1 = 0$. *Solución.* 210°, 330°. **54.** $\sqrt{2} \cos A - 1 = 0$.

En cada uno de los siguientes ejercicios construir todos los lados terminales posibles del ángulo A, y hallar los valores de las otras funciones. Las soluciones están dadas en el orden $\operatorname{sen} A$, $\cos A$, $\operatorname{tg} A$, $\operatorname{ctg} A$, $\sec A$, $\csc A$.

55. $\operatorname{sen} A = \frac{3}{5}$. *Solución.* $\frac{3}{5}$, $\pm\frac{4}{5}$, $\pm\frac{3}{4}$. etc.

56. $\cos A = -\frac{1}{3}$.

57. ctg $A=-3$. *Solución.* $\pm\frac{\sqrt{10}}{10}$, $\pm\frac{3\sqrt{10}}{10}$, $-\frac{1}{3}$, etc.

58. sec $A=-5/3$.

59. csc $A=13/5$. *Solución.* $5/13$, $\pm 12/13$, $\pm 5/12$, etc.

60. tg $A=\frac{a}{b}$.

61. sen $A=c$. *Solución.* c, $\pm\sqrt{1-c^2}$, $\pm\frac{c}{\sqrt{1-c^2}}$, etc.

62. cos $A=\frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$.

63. csc $A=-\sqrt{3}$. *Solución.* $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, $\pm\frac{\sqrt{6}}{3}$, $\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$, etc.

64. cos $A=\frac{m}{c}$.

65. tg $A=-\sqrt{7}$. *Solución.* $\pm\frac{\sqrt{14}}{4}$, $\pm\frac{\sqrt{2}}{4}$, $-\sqrt{7}$, etc.

66. sen $A=-2/3$.

67. tg $A=-2{,}5$. *Solución.* $\pm\frac{5\sqrt{29}}{29}$, $\pm\frac{2\sqrt{29}}{29}$, $\frac{5}{2}$, etc.

68. sec $A=p$.

En cada uno de los siguientes ejercicios hallar las funciones de A a partir de los datos dados:

69. sen $A=3/5$, A en el primer cuadrante.

Solución. $3/5$, $4/5$, $3/4$, etc.

70. cos $A=-3/4$, A en el segundo cuadrante.

71. tg $A=3/4$, A en el tercer cuadrante.

Solución. $-3/5$, $-4/5$, $3/4$, etc.

72. ctg $A=-12/5$, sen A positivo.

73. sec $A=3/2$, tg A negativa.

Solución. $-\frac{\sqrt{5}}{3}$, $\frac{2}{3}$, $-\frac{\sqrt{5}}{2}$, etc.

74. $\csc A = -3$, ctg A positiva.

75. tg $A = 2$, sen A negativa.

Solución. $-\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$, $-\dfrac{\sqrt{5}}{5}$, 2, etc.

76. $\cos A = -\frac{8}{17}$, ctg A negativa.

16. Expresar cinco de las funciones trigonométricas en función de la sexta. El método que vamos a exponer en los ejemplos siguientes es el más conveniente y directo.

Ejemplo 1. Calcular en función de sen A cada una de las otras cinco funciones trigonométricas de A.

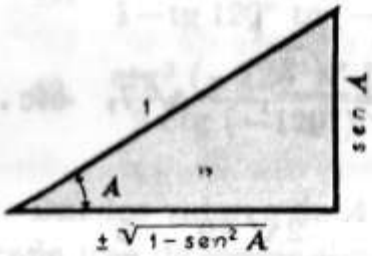


Fig. 30

Solución. De (7) (Art. 13), tenemos:

$$\text{sen } A = \frac{\text{sen } A}{1} = \frac{y}{r}.$$

Tomemos $r = 1$. Entonces $y = \text{sen } A$. Ahora hallemos x. Tenemos

$$x = \pm\sqrt{r^2 - y^2} = \pm\sqrt{1 - \text{sen}^2 A}.$$

Por las definiciones dadas en el Artículo 13, hallamos:

$$\text{sen } A = \text{sen } A; \qquad \csc A = \frac{1}{\text{sen } A};$$

$$\cos A = \pm\sqrt{1 - \text{sen}^2 A}; \qquad \sec A = \pm\frac{1}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 A}};$$

$$\text{tg } A = \pm\frac{\text{sen } A}{\sqrt{1 - \text{sen}^2 A}}; \qquad \text{ctg } A = \pm\frac{\sqrt{1 - \text{sen}^2 A}}{\text{sen } A}.$$

Es conveniente dibujar (fig. 30) como comprobación un triángulo rectángulo en el cual x = lado horizontal, y = lado vertical, y r = hipotenusa.

Ejemplo 2. Expresar en función de tg A cada una de las otras cinco funciones trigonométricas de A.

Solución. De la fórmula (9) (Art. 13) y de la figura podemos escribir

$$\operatorname{tg} A = \frac{\operatorname{tg} A}{1} = \frac{y}{x}.$$

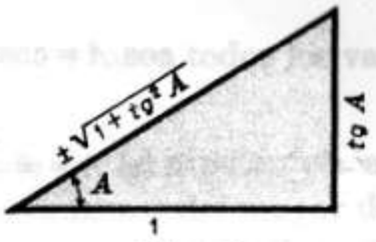


Fig 31

Tomemos $x=1$. Entonces $y = \operatorname{tg} A$. Ahora bien

$$r = \pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 A}.$$

Por tanto,

$$\operatorname{sen} A = \pm\frac{\operatorname{tg} A}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 A}}; \qquad \csc A = \pm\frac{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 A}}{\operatorname{tg} A};$$

$$\cos A = \pm\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 A}}; \qquad \sec A = \pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 A};$$

$$\operatorname{tg} A = \operatorname{tg} A; \qquad \operatorname{ctg} A = \frac{1}{\operatorname{tg} A}.$$

Ejemplo 3. Dada $\sec A = 5/4$, calcular las demás funciones trigonométricas del ángulo A.

Solución. Por (11) (Art. 13), tenemos

$$\sec A = \frac{5}{4} = \frac{r}{x}.$$

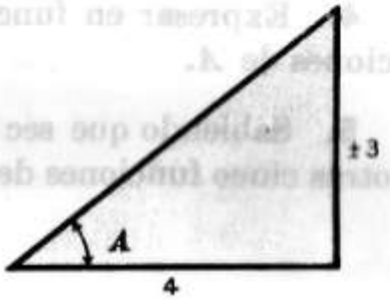


Fig. 32

Tomemos $r = 5$. Entonces, $x = 4$. Por tanto,

$$y = \pm\sqrt{r^2 - x^2} = \pm 3.$$

Luego tenemos

$$\operatorname{sen} A = \pm 3/5; \qquad \csc A = \pm 5/3;$$

$$\cos A = 4/5; \qquad \sec A = 5/4;$$

$$\operatorname{tg} A = \pm 3/4; \qquad \operatorname{ctg} A = \pm 4/3.$$

PROBLEMAS

1. Expresar en función de $\cos A$ cada una de las otras cinco funciones de A.

Solución. $\operatorname{sen} A = \pm\sqrt{1-\cos^2 A}$; $\quad \csc A = \pm\dfrac{1}{\sqrt{1-\cos^2 A}}$;

$\cos A = \cos A$; $\quad \sec A = \dfrac{1}{\cos A}$;

$\operatorname{tg} A = \pm\dfrac{\sqrt{1-\cos^2 A}}{\cos A}$; $\quad \operatorname{ctg} A = \pm\dfrac{\cos A}{\sqrt{1-\cos^2 A}}$.

2. Expresar en función de ctg A cada una de las otras cinco funciones trigonométricas de A.

3. Expresar en función de sec A cada una de las otras cinco funciones de A.

Solución. $\operatorname{sen} A = \pm\dfrac{\sqrt{\sec^2 A-1}}{\sec A}$; $\quad \csc A = \pm\dfrac{\sec A}{\sqrt{\sec^2 A-1}}$;

$\cos A = \dfrac{1}{\sec A}$; $\quad \sec A = \sec A$;

$\operatorname{tg} A = \pm\sqrt{\sec^2 A-1}$; $\quad \operatorname{ctg} A = \pm\dfrac{1}{\sqrt{\sec^2 A-1}}$.

4. Expresar en función de csc A cada una de las otras cinco funciones de A.

5. Sabiendo que $\sec A = -17/8$, hallar los valores de cada una de las otras cinco funciones de A.

Solución. $\operatorname{sen} A = \pm 15/17$; $\csc A = \pm 17/15$;

$\cos A = -8/17$; $\sec A = -17/8$;

$\operatorname{tg} A = \mp 15/8$; $\operatorname{ctg} A = \mp 8/15$.

6. Sabiendo que $\operatorname{sen} A = a$, hallar los valores de cada una de las otras funciones de A.

PROBLEMAS ADICIONALES

1. Hallar los ángulos comprendidos entre 0° y 360° cuyo seno sea recíproco de la secante. *Solución.* 45°, 225°.

2. Demostrar que la expresión $\operatorname{sen} A = \dfrac{1}{\cos A}$ es falsa, demostrando que tg A sería entonces un número imaginario.

3. Hallar los valores de A comprendidos entre 0° y 180° que satisfacen la ecuación $2 \text{ sen } 2A = \sqrt{3} \text{ tg } 225°$. *Solución.* 30°, 60°.

4. Demostrar que sen $2A$ es menor que 2 sen A para todos los valores de A comprendidos entre 0° y 180°.

5. Si en un triángulo rectángulo el cuadrado de la hipotenusa es igual a $\frac{5}{2}$ del producto de los catetos, hállese la tangente del mayor de los ángulos agudos del triángulo. *Solución.* 2.

6. Hallar el valor de $\dfrac{\text{sen } A}{1+\cos A}$:

a. Cuando tg $A = \frac{5}{12}$. *Solución.* $\frac{1}{5}$ y -5.

b. Cuando tg $A = -\frac{5}{12}$. *Solución.* $-\frac{1}{5}$ y 5.

CAPITULO II

RELACIONES FUNDAMENTALES. FORMULAS DE REDUCCION

17. Relaciones fundamentales. En las igualdades **(7)** a **(12)** (Art. 13), llamemos A al ángulo XOB. Entonces, para cualquier ángulo A, tendremos:

$$(1)\quad \operatorname{sen} A = \frac{y}{r}; \qquad (4)\quad \csc A = \frac{r}{y};$$

$$(2)\quad \cos A = \frac{x}{r}; \qquad (5)\quad \sec A = \frac{r}{x};$$

$$(3)\quad \operatorname{tg} A = \frac{y}{x}; \qquad (6)\quad \operatorname{ctg} A = \frac{x}{y}.$$

Ahora vamos a demostrar el siguiente

Teorema. *Las seis funciones trigonométricas de un ángulo* A *satisfacen las relaciones:*

$$(13)\quad \operatorname{sen} A \csc A = 1. \qquad (17)\quad \operatorname{ctg} A = \frac{\cos A}{\operatorname{sen} A}.$$

$$(14)\quad \cos A \sec A = 1. \qquad (18)\quad \operatorname{sen}^2 A + \cos^2 A = 1.$$

$$(15)\quad \operatorname{tg} A \operatorname{ctg} A = 1. \qquad (19)\quad \sec^2 A = 1 + \operatorname{tg}^2 A.$$

$$(16)\quad \operatorname{tg} A = \frac{\operatorname{sen} A}{\cos A}. \qquad (20)\quad \csc^2 A = 1 + \operatorname{ctg}^2 A.$$

Demostración de (13). De (1) y (4), tenemos

$$\operatorname{sen} A \csc A = \frac{y}{r} \times \frac{r}{y} = 1.$$

Las fórmulas **(14)** y **(15)** se demuestran de una manera semejante. De **(13)**, hallamos

$$\operatorname{sen} A = \frac{1}{\csc A}, \quad \csc A = \frac{1}{\operatorname{sen} A}$$

como en el Artículo 13.

Demostración de (16). Dividiendo el numerador y el denominador del segundo miembro de (3) por r y teniendo en cuenta las igualdades (1) y (2), hallamos

$$\operatorname{tg} A = \frac{\frac{y}{r}}{\frac{x}{r}} = \frac{\operatorname{sen} A}{\cos A}.$$

La fórmula **(17)** se demuestra de una manera semejant

Demostraciones de (18) a (20). De (1) (Art. 13), elevando al cuadrado ambos miembros, obtenemos

(7) $$r^2 = x^2 + y^2.$$

Dividiendo cada término por r^2, hallamos

(8) $$1 = \left(\frac{x}{r}\right)^2 + \left(\frac{y}{r}\right)^2.$$

Dividiendo cada término por x^2, resulta

(9) $$\left(\frac{r}{x}\right)^2 = 1 + \left(\frac{y}{x}\right)^2.$$

Dividiendo cada término por y^2, obtenemos

$$(10) \qquad \left(\frac{r}{y}\right)^2 = \left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1.$$

Consideremos (8). De (1) y (2), hallamos

$$\frac{x}{r} = \cos A, \quad \frac{y}{r} = \operatorname{sen} A.$$

Sustituyendo en el segundo miembro de (8), obtenemos **(18).**

Análogamente, de (9) y teniendo en cuenta (5) y (3), podemos demostrar **(19)**, y de (10), usando (4) y (6), se demuestra la **(20).**

Es de suma importancia aprenderse de memoria las fórmulas **(13) a (20).**

También se deben aprender las siguientes fórmulas deducidas de ellas:

(21) $\operatorname{sen} A = \dfrac{1}{\csc A}$, que se deduce de **(13).**

(22) $\operatorname{sen} A = \pm\sqrt{1-\cos^2 A}$,* que se deduce despejando $\operatorname{sen} A$ en **(18).**

(23) $\cos A = \dfrac{1}{\sec A}$, que se obtiene de la **(14).**

(24) $\cos A = \pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 A}$, que se deduce despejando $\cos A$ en **(18).**

(25) $\operatorname{tg} A = \dfrac{1}{\operatorname{ctg} A}$, deducida de la **(15).**

---

* El doble signo significa que obtenemos dos valores para algunas de las funciones, a menos que se dé una condición que determine si se ha de tomar el signo más o el menos. La razón de esto es que existen dos ángulos menores de 360° para los cuales una función tiene un valor determinado.

(26) $\operatorname{tg} A = \pm\sqrt{\sec^2 A - 1}$, obtenida despejando $\operatorname{tg} A$ en (19).

(27) $\operatorname{tg} A = \dfrac{\operatorname{sen} A}{\cos A} = \dfrac{\operatorname{sen} A}{\pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 A}} = \dfrac{\pm\sqrt{1-\cos^2 A}}{\cos A}$. [De (16) y también de (24) y (22).]

(28) $\csc A = \dfrac{1}{\operatorname{sen} A}$, obtenida de la (13).

(29) $\csc A = \pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 A}$, obtenida despejando $\csc A$ en (20).

(30) $\sec A = \dfrac{1}{\cos A}$, deducida de la (14).

(31) $\sec A = \pm\sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 A}$, deducida despejando $\sec A$ en (19).

(32) $\operatorname{ctg} A = \dfrac{1}{\operatorname{tg} A}$, deducida de (15).

(33) $\operatorname{ctg} A = \pm\sqrt{\csc^2 A - 1}$, obtenida despejando $\operatorname{ctg} A$ en (20).

(34) $\operatorname{ctg} A = \dfrac{\cos A}{\operatorname{sen} A} = \dfrac{\cos A}{\pm\sqrt{1-\cos^2 A}} = \dfrac{\pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 A}}{\operatorname{sen} A}$. [De (17) y también de (22) y (24).]

Cálculo de una función trigonométrica cualquiera en función de cada una de las otras cinco. Por medio de las fórmulas anteriores podemos hallar fácilmente una función trigonométrica cualquiera en función de cada una de las otras cinco funciones. Veamos algunos ejemplos:

Ejemplo 1. Hallar sen A en función de cada una de las otras cinco funciones de A.

a. $\operatorname{sen} A = \dfrac{1}{\csc A}$, de **(21)**

b. $\operatorname{sen} A = \pm\sqrt{1-\cos^2 A}$, de **(22)**

c. $\operatorname{sen} A = \dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 A}}$, sustituyendo **(29)** en **a**

d. $\operatorname{sen} A = \pm\sqrt{1-\dfrac{1}{\sec^2 A}} = \dfrac{\pm\sqrt{\sec^2 A-1}}{\sec A}$,

sustituyendo **(23)** en **b**

e. $\operatorname{sen} A = \dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\dfrac{1}{\operatorname{tg}^2 A}}} = \dfrac{\operatorname{tg} A}{\pm\sqrt{\operatorname{tg}^2 A+1}}$, sustituyendo **(32)** en **c**

Ejemplo 2. Hallar cos A en función de cada una de las otras cinco funciones trigonométricas del ángulo A.

a. $\cos A = \dfrac{1}{\sec A}$, de **(23)**

b. $\cos A = \pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 A}$, de **(24)**

c. $\cos A = \dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 A}}$, sustituyendo **(31)** en **a**

d. $\cos A = \pm\sqrt{1-\dfrac{1}{\csc^2 A}} = \dfrac{\pm\sqrt{\csc^2 A-1}}{\csc A}$,

sustituyendo **(21)** en **b**

e. $\cos A = \dfrac{1}{\pm\sqrt{1+\dfrac{1}{\operatorname{ctg}^2 A}}} = \dfrac{\operatorname{ctg} A}{\pm\sqrt{\operatorname{ctg}^2 A+1}}$,

sustituyendo **(25)** en **c**

Ejemplo 3. Hallar tg A en función de cada una de las otras cinco funciones.

a. $\operatorname{tg} A = \dfrac{1}{\operatorname{ctg} A}$, de **(25)**

b. $\operatorname{tg} A = \pm\sqrt{\sec^2 A - 1}$, de **(26)**

c. $\operatorname{tg} A = \dfrac{\operatorname{sen} A}{\pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 A}}$, de **(27)**

d. $\operatorname{tg} A = \dfrac{\pm\sqrt{1-\cos^2 A}}{\cos A}$, de **(27)**

e. $\operatorname{tg} A = \dfrac{1}{\pm\sqrt{\csc^2 A - 1}}$, sustituyendo **(33)** en **a**

EJEMPLO 4. Demostrar que $\sec A - \operatorname{tg} A \,.\, \operatorname{sen} A = \cos A$.

Solución. Se aplican al primer miembro las fórmulas **(21)** a **(34)** (Art. 17), y se efectúan las reducciones convenientes hasta que quede idéntico al segundo miembro.

Así, $\sec A - \operatorname{tg} A \,.\, \operatorname{sen} A = \dfrac{1}{\cos A} - \dfrac{\operatorname{sen} A}{\cos A} \,.\, \operatorname{sen} A.$

$$\left[\text{Ya que } \sec A = \frac{1}{\cos A} \text{ y } \operatorname{tg} A = \frac{\operatorname{sen} A}{\cos A}.\ *\right]$$

$$= \frac{1-\operatorname{sen}^2 A}{\cos A} = \frac{\cos^2 A}{\cos A} \qquad \textbf{(18)} \text{ (Art. 17)}$$

$$= \cos A.$$

EJEMPLO 5. Demostrar que

$$\operatorname{sen} x(\sec x + \csc x) - \cos x(\sec x - \csc x) = \sec x \csc x.$$

---

* Generalmente, suele ser buen procedimiento transformar la expresión dada en otra que contenga solamente senos y cosenos, y luego simplificarla hasta obtener la forma buscada. Es admisible cualquiera operación que no altere el valor de la expresión. Evítese hasta donde sea posible el uso de radicales.

Solución. $\operatorname{sen} x(\sec x+\csc x)-\cos x(\sec x-\csc x)$

$$=\operatorname{sen} x\left(\frac{1}{\cos x}+\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)-\cos x\left(\frac{1}{\cos x}-\frac{1}{\operatorname{sen} x}\right)$$

$$\left[\text{Ya que } \sec x=\frac{1}{\cos x} \text{ y } \csc x=\frac{1}{\operatorname{sen} x}.\right]$$

$$=\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}+1-1+\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

$$=\frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}+\frac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$$

$$=\frac{\operatorname{sen}^2 x+\cos^2 x}{\cos x \operatorname{sen} x}=\frac{1}{\cos x \operatorname{sen} x} \qquad (18) \text{ (Art. 17)}$$

$$=\frac{1}{\cos x}\cdot\frac{1}{\operatorname{sen} x}=\sec x \csc x.$$

PROBLEMAS

1. Hallar $\sec x$ en función de cada una de las otras cinco funciones de x.

Solución. $\dfrac{1}{\cos x}$, $\pm\sqrt{1+\operatorname{tg}^2 x}$, $\dfrac{1}{\pm\sqrt{1-\operatorname{sen}^2 x}}$, $\dfrac{\pm\sqrt{\operatorname{ctg}^2 x+1}}{\operatorname{ctg} x}$, $\dfrac{\csc x}{\pm\sqrt{\csc^2 x-1}}$.

2. Hallar $\operatorname{ctg} x$ en función de cada una de las otras cinco funciones de x.

3. Hallar $\csc x$ en función de cada una de las otras cinco funciones de x.

Solución. $\dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$, $\pm\sqrt{1+\operatorname{ctg}^2 x}$; $\dfrac{1}{\pm\sqrt{1-\cos^2 x}}$, $\dfrac{\pm\sqrt{\operatorname{tg}^2 x+1}}{\operatorname{tg} x}$, $\dfrac{\sec x}{\pm\sqrt{\sec^2 x-1}}$.

4. Demostrar las siguientes igualdades:

a. $\cos x \operatorname{tg} x = \operatorname{sen} x$.

b. $\operatorname{sen} x \sec x = \operatorname{tg} x$.

c. $\operatorname{sen} y \operatorname{ctg} y = \cos y$.

d. $(1+\operatorname{tg}^2 y) \cos^2 y = 1$.

e. $\operatorname{sen}^2 A + \operatorname{sen}^2 A \operatorname{tg}^2 A = \operatorname{tg}^2 A$.

f. $\operatorname{ctg}^2 A - \cos^2 A = \operatorname{ctg}^2 A \cos^2 A$.

g. $\operatorname{tg} A + \operatorname{ctg} A = \sec A \csc A$.

h. $\cos A \csc A = \operatorname{ctg} A$.

i. $\cos^2 A - \operatorname{sen}^2 A = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 A$.

j. $\cos^2 A - \operatorname{sen}^2 A = 2\cos^2 A - 1$.

k. $(1+\operatorname{ctg}^2 B) \operatorname{sen}^2 B = 1$.

l. $(\csc^2 A - 1) \operatorname{sen}^2 A = \cos^2 A$.

m. $\sec^2 A + \csc^2 A = \sec^2 A \csc^2 A$.

n. $\cos^4 C - \operatorname{sen}^4 C + 1 = 2\cos^2 C$.

o. $(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 + (\operatorname{sen} x - \cos x)^2 = 2$.

p. $\operatorname{sen}^3 x \cos x + \cos^3 x \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x \cos x$.

q. $\operatorname{sen}^2 B + \operatorname{tg}^2 B = \sec^2 B - \cos^2 B$.

r. $\operatorname{ctg} y + \dfrac{\operatorname{sen} y}{1+\cos y} = \csc y$.

s. $\cos B \operatorname{tg} B + \operatorname{sen} B \operatorname{ctg} B = \operatorname{sen} B + \cos B$.

t. $\sec x \csc x (\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) = \operatorname{ctg} x - \operatorname{tg} x$.

u. $\dfrac{\cos C}{1-\operatorname{tg} C} + \dfrac{\operatorname{sen} C}{1-\operatorname{ctg} C} = \operatorname{sen} C + \cos C$.

v. $\dfrac{\operatorname{sen} z}{1+\cos z} + \dfrac{1+\cos z}{\operatorname{sen} z} = 2\csc z$.

Usando las relaciones fundamentales (13) á (20), calcular los valores de todas las funciones a partir de los siguientes datos:

5. $\cos A = -4/5$, cuando A está en el segundo cuadrante.

Solución. $3/5$, $-4/5$, $-3/4$, etc.

6. $\operatorname{tg} A = 3/2$, cuando A está en el tercer cuadrante.

7. $\csc A = -3$, cuando A está en el cuarto cuadrante.

Solución. $-\dfrac{1}{3}$, $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$, $-\dfrac{\sqrt{2}}{4}$, etc.

8. $\operatorname{ctg} A = -2$, si A está en el segundo cuadrante.

9. $\operatorname{sen} A = 0{,}25$, si A está en el segundo cuadrante.

Solución. 0,25, $-0{,}97$, $-0{,}26$, etc.

10. $\csc A = m$, cuando A está en el primer cuadrante.

Calcular algebraicamente el valor de cada una de las siguientes expresiones a partir de los datos dados. Considerar en cada caso el ángulo como agudo.

11. $(\cos^2 A - \text{sen}^2 A)\,\text{tg}^2 A$, dado $\text{sen}\, A = \frac{1}{2}$. *Solución.* $\frac{1}{6}$.

12. $\left(\dfrac{\text{sen}\, B - \cos B}{\text{sen}\, B + \cos B}\right)^2$, dada $\text{ctg}\, B = 2$.

13. $\text{sen}^3 z \cos z + \cos^3 z\, \text{sen}\, z$, dada $\text{tg}\, z = \frac{2}{5}$. *Solución.* $\frac{10}{29}$.

14. $\dfrac{\text{sen}\, z}{1+\cos z} + \dfrac{1+\cos z}{\text{sen}\, z}$, dada $\sec z = \frac{5}{4}$.

15. $\sec^4 \alpha - \sec^2 \alpha - \text{tg}^4 \alpha - \text{tg}^2 \alpha$, dada $\csc \alpha = 3\sqrt{3}$. (α es la letra griega "alfa".) *Solución.* 0.

16. $\sec^2 \beta\, (1 + \cos \beta\, \text{tg}\, \beta)$, dada $\csc \beta = 2$. (β es la letra griega "beta".)

17. Transformar las siguientes expresiones en otras que no contengan más que la función seno y simplificar los resultados. Considerar en cada caso el ángulo dado como agudo.

a. $\dfrac{\csc A}{\text{ctg}\, A}$ *Solución.* $\dfrac{1}{\sqrt{1-\text{sen}^2 A}}$.

b. $\sec y - \cos y$. *Solución.* $\dfrac{\text{sen}^2 y}{\sqrt{1-\text{sen}^2 y}}$.

c. $\text{ctg}\, z \cos z - \csc z\, (1 - 2\, \text{sen}^2 z)$. *Solución.* $\text{sen}\, z$.

18. Transformar las siguientes expresiones en otras equivalentes que contengan solamente $\text{tg}\, A$:

a. $\sec^2 A - \csc^2 A$.

b. $\sec A \csc A\, (\cos^2 A - \text{sen}^2 A)$.

c. $\dfrac{\text{sen}^2 A}{\text{ctg}^2 A} - \dfrac{\cos^2 A}{1-\sec^2 A}$.

Transformar las siguientes expresiones en otras equivalentes que contengan solamente senos y cosenos. Simplificar los resultados.

19. $\text{tg}\, z + \text{ctg}\, z$. *Solución.* $\dfrac{1}{\text{sen}\, z \cos z}$.

20. $\csc A - \operatorname{sen} A \operatorname{ctg}^2 A$.

21. $\dfrac{1+\operatorname{tg} a}{\sec a}$. *Solución.* $\operatorname{sen} a + \cos a$.

22. $\dfrac{\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} B}{1 - \operatorname{tg} A \operatorname{tg} B}$.

19. División por cero; infinito. Ahora vamos a discutir una dificultad que se presenta en el siguiente artículo. Si a y b son dos números, y b es diferente de cero, entonces existe siempre un tercer número único x que satisface a la igualdad

(1) $$a = bx,$$

y el valor de x es

(2) $$x = \frac{a}{b}.$$

Si $b=0$, la igualdad (1) no es verdadera a menos que a sea también igual cero, y, en este caso, es verdadera para *cualquier* número x.

Este hecho deja establecido que la expresión

(3) $$\frac{a}{0} (\text{“}a \text{ dividida por cero”})$$

carece de sentido. *La división por cero* no es, por consiguiente, una operación aritmética.

Consideremos la relación funcional

(4) $$y = \frac{1}{x}.$$

El valor de y queda determinado cuando se le da a x un valor cualquiera *excepto* cero. Consideremos ahora los valores de y cuando se dan valores positivos a x que *decrecen* constantemente y se aproximan a cero. Es fácil ver que los valores de y van creciendo constantemente llegando a ser mayores que cualquier número positivo por grande que se suponga

Si se dan a x valores negativos que decrecen constantemente en valor absoluto, los valores de y serán negativos y crecerán constantemente en valor absoluto. Esto se expresa así: *Cuando los valores de* x *decrecen constantemente en valor absoluto, es decir, tienden a cero, la función*

$$\frac{1}{x}$$

se dice que se hace infinita. Cuando una variable y se hace infinita, escribimos abreviadamente, $y=\infty$.

20. Funciones trigonométricas de los ángulos de 0°, 90°, 180°, 270°. Tomemos un punto sobre cada uno de los

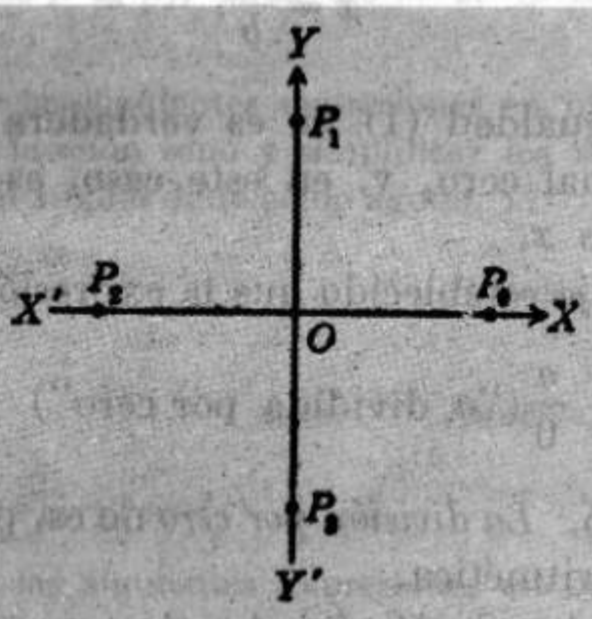


Fig. 33

lados terminales de estos ángulos a una unidad de distancia del origen. Las coordenadas de estos puntos son:

$0°$: para P_0 tenemos $x=1$, $y=0$;
$90°$: para P_1 tenemos $x=0$, $y=1$;
$180°$: para P_2 tenemos $x=-1$, $y=0$;
$270°$: para P_3 tenemos $x=0$, $y=-1$.

En cada caso $r=1$.

Sustituyendo estos valores en las igualdades **(7)** a **(12)** (Artículo 13) obtenemos los valores de las funciones trigonométricas que se buscan, excepto cuando el valor cero aparece en el denominador. Por ejemplo, para $0°$ tenemos

$$\text{sen } 0° = \frac{0}{1} = 0; \quad \cos 0° = \frac{1}{1} = 1;$$

$$\text{tg } 0° = \frac{0}{1} = 0; \quad \sec 0° = \frac{1}{1} = 1.$$

Pero **(10)** y **(12)** (Art. 13), carecen de sentido, ya que aparece en ellas "la división por cero".

La función **ctg 0°** no está definida, esto es, carece de valor numérico. Sin embargo, de **(32)** (Art. 17), obtenemos

$$\text{ctg } A = \frac{1}{\text{tg } A};$$

y como a medida que A decrece y se aproxima a $0°$, tg A decrece y se aproxima a cero (tg $0° = 0$), resulta que ctg A se hace infinita. Es decir (Art. 19), podemos expresar este resultado en forma abreviada escribiendo

$$\text{ctg } 0° = \infty.$$

El razonamiento es el mismo en cada caso en el que el denominador es cero en **(7)** a **(12)** (Art. 13), es decir, cuando la función recíproca correspondiente se hace infinita.

Finalmente, como un segundo ejemplo, consideremos sec A cuando $A = 90°$. Entonces, **(11)** (Art. 13), carece de sentido, ya que $x = 0$. Ahora bien,

$$\sec A = \frac{1}{\cos A}. \qquad \textbf{(30)} \text{ (Art. 17).}$$

También $\cos 90° = 0$. Entonces a medida que A crece y se aproxima a $90°$, sec A se hace infinita.

La siguiente tabla se puede verificar fácilmente:

Angulo	sen	cos	tg	ctg	sec	csc
0	0	1	0	∞	1	∞
90°	1	0	∞	0	∞	1
180°	0	-1	0	∞	-1	∞
270°	-1	0	∞	0	∞	-1

Las funciones de 360° son las mismas que las de 0°, ya que estos ángulos tienen el mismo lado final.

PROBLEMAS

Demostrar que

1. $\operatorname{sen} 0^\circ + \cos 90^\circ = 0.$
2. $\operatorname{sen} 180^\circ + \cos 270^\circ = 0.$
3. $\cos 0^\circ + \operatorname{tg} 0^\circ = 1.$
4. $\operatorname{tg} 180^\circ + \operatorname{ctg} 90^\circ = 0.$
5. $\operatorname{sen} 270^\circ - \operatorname{sen} 90^\circ = -2.$
6. $\cos 0^\circ + \operatorname{sen} 90^\circ = 2.$
7. $\sec 0^\circ + \csc 90^\circ = 2.$
8. $\operatorname{sen} 90^\circ + \cos 90^\circ + \csc 90^\circ + \operatorname{ctg} 90^\circ = 2.$
9. $\cos 180^\circ + \sec 180^\circ + \operatorname{sen} 180^\circ + \operatorname{tg} 180^\circ = -2.$
10. $(a^2 - b^2)\cos 360^\circ - 4ab \operatorname{sen} 270^\circ = a^2 + 4ab - b^2.$
11. $\cos 30^\circ \cos 60^\circ - \operatorname{sen} 30^\circ \operatorname{sen} 60^\circ = \cos 90^\circ.$
12. $\operatorname{sen} 180^\circ + \operatorname{sen} 90^\circ = 2 \operatorname{sen} 135^\circ \cos 45^\circ.$
13. $\operatorname{sen} 90^\circ = \operatorname{sen} 180^\circ \cos(-90^\circ) + \cos 180^\circ \operatorname{sen}(-90^\circ).$
14. $4\cos^3 60^\circ - 3\cos 60^\circ = \cos 180^\circ.$
15. Comparar el valor de la función $\operatorname{sen}(90^\circ + 60^\circ)$ con el valor de $\operatorname{sen} 90^\circ + \operatorname{sen} 60^\circ$

16. Comparar el valor de la función tg $(120°+60°)$ con el valor de tg $120°+$tg $60°$.

17. Comparar el valor de 2 sen $45°$ con el valor de sen $(2\times 45°)$.

18. Hallar el valor de

$$\cos A+\cos 2A+\cos 3A+\cos 4A+\cos 5A+\cos 6A,\ \text{si } A=60°.$$

21. Medida de ángulos. Hay dos sistemas generalmente usados para medir los ángulos. En las matemáticas elementales el sistema más empleado es el de

Medida en grados.* *En este sistema el ángulo unidad es* ***un grado,*** *igual al ángulo central que subtiende un arco cuya longitud es igual a* $\frac{1}{360}$ *de la longitud de la circunferencia.* El grado se subdivide en 60 *minutos,* y el minuto en 60 *segundos.* Los grados, minutos y segundos, se representan por ciertos símbolos. Así 63 grados, 15 minutos, 36 segundos, se escribe $63°\ 15'\ 36''$. Reduciendo los segundos a décimas de minuto el ángulo puede escribirse $63°\ 15{,}6'$. Reduciendo los minutos a décimas de grados, el ángulo puede también escribirse $63{,}26°$.** Se ha supuesto que el estudiante está ya familiarizado con este sistema de medición de ángulos, y la única razón por la que nos referimos aquí a él es para compararlo con el siguiente sistema.

---

* Este sistema de medida fué inventado por los primitivos babilonios, cuyas tablas de pesos y medidas estaban basadas en una escala de 60. Esto se debió probablemente a que ellos contaban el año de 360 días. Esto condujo, pues, a la división de la circunferencia de un círculo en 360 grados. Un radio trazado como cuerda subtiende entonces 60 grados. Este grado se llama *sexagesimal.* En Topografía se usa también el grado *centesimal* que se obtiene de suponer dividida la circunferencia en 400 grados.

** Para reducir segundos a fracción decimal de minuto dividimos el número de segundos por 60. De manera semejante reducimos minutos a fracción decimal de grado. Véanse las tablas de conversión de Granville, Smith y Mikesh dadas a final del libro, a continuación de la tabla II.

22. Medida circular. *En este sistema la unidad es* ***el radián,*** *que es el ángulo correspondiente a un arco cuya longitud es igual a la longitud del radio del círculo.*

Así en la figura 34, si la longitud del arco AB es igual al radio del círculo, entonces

$$\text{ángulo } AOB = 1 \text{ radián.}$$

La *medida circular* de un ángulo es su magnitud expresada en función de su radio y tiene la ventaja de que la longitud de un arco cualquiera tiene la misma medida en radios que el ángulo correspondiente en radianes. Este sistema fué introducido en los comienzos del siglo pasado. En la actualidad se usa bastante en los trabajos prácticos, y su empleo es universal en las ramas avanzadas de las matemáticas.

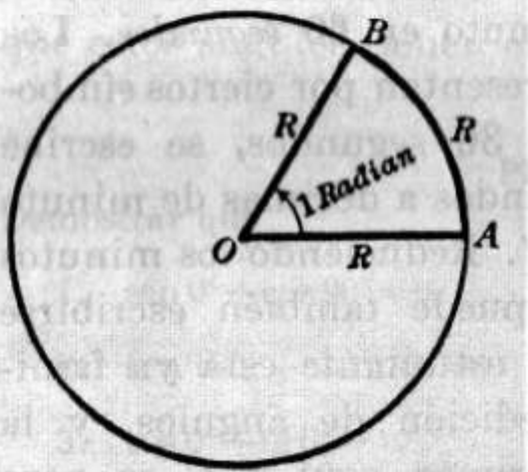


Fig. 34

En este libro se usarán ambos sistemas.

Veamos ahora la relación entre las unidades de los dos sistemas. Por Geometría sabemos que la longitud de una circunferencia es igual $2\pi R$; y esto significa que la razón de la circunferencia al radio es 2π. Pero una circunferencia subtiende un ángulo central de $360°$. Por lo tanto,

$$2\pi \text{ radianes} = 360°,$$

$$\pi \text{ radianes} = 180°,$$

$$1 \text{ radián} = \frac{180°}{\pi} = \frac{180°}{3{,}141593}, \text{ o sea,}$$

(35) $$1 \text{ radián} = 57{,}2958° = 57°\ 17'\ 44{,}8''.$$

De estas igualdades se deduce:

Para reducir radianes a grados, *multiplíquese el número de radianes por* **57,2958** $\left(=\dfrac{180}{\pi}\right)$.

Como $360° = 2\pi$ radianes,

$$1° = \frac{\pi}{180}\text{ radián} = \frac{3{,}141593}{180}\text{ radián, o sea,}$$

$$1° = 0{,}017453 \text{ radián.} \tag{36}$$

Y de aquí:

Para reducir grados a radianes, *multiplíquese el número de grados por* **0,017453** $\left(=\dfrac{\pi}{180}\right)$

El lector debe acostumbrarse a expresar ángulos en medida circular, así:

$$360° = 2\pi \text{ radianes,} \qquad 60° = \frac{\pi}{3}\text{ radianes,}$$

$$180° = \pi \text{ radianes,} \qquad 30° = \frac{\pi}{6}\text{ radianes,}$$

$$90° = \frac{\pi}{2}\text{ radianes,} \qquad 45° = \frac{\pi}{4}\text{ radianes,}$$

$$270° = \frac{3\pi}{2}\text{ radianes,} \qquad 15° = \frac{\pi}{12}\text{ radianes, etc.}$$

Al escribir las funciones trigonométricas de los ángulos expresadas en medida circular se acostumbra omitir la palabra "radianes", así:

sen (π radianes) se escribe simplemente sen π y es lo mismo que sen $180°$;

$\text{ctg}\left(\frac{3\pi}{4}\text{ radianes}\right)$ se escribe simplemente $\text{ctg}\,\frac{3\pi}{4}$ y es igual a $\text{ctg}\,135°$;

$\cos\left(\frac{5\pi}{6}\text{ radianes}\right)$ se escribe simplemente $\cos\frac{5\pi}{6}$ y es igual a $\cos 150°$;

csc (1 radián) se escribe simplemente csc 1 y es igual a csc 57,30°;

sec (½ radián) se escribe simplemente sec ½ y es igual a sec 28,65°, etc.

Como el número de veces que el radio del círculo cabe en un arco del mismo círculo, determina el número de radianes que mide el ángulo central que subtiende a ese arco, tenemos

(37) La medida de un ángulo en radianes es igual a

$$\frac{\textbf{longitud del arco subtendido}}{\textbf{longitud del radio}}.$$

Por tanto, conociendo dos cualesquiera de las cantidades que aparecen en esta relación, puede hallarse fácilmente la tercera.

Ejemplo 1. Reducir $\frac{3\pi}{5}$ radianes a grados.

Solución. Como 1 radián $= \frac{180°}{\pi}$,

$$\frac{3\pi}{5}\text{ radianes} = \frac{3\pi}{5}\left(\frac{180°}{\pi}\right),$$
$$= 108°.$$

Ejemplo 2. Reducir 1,27 radianes a grados.

Solución. Como un radián $= \frac{180°}{\pi} = 57{,}2958°$,

$$1{,}27\text{ radianes} = 1{,}27\,(57{,}2958)°$$
$$= 72{,}7657°$$
$$= 72°\ 45'\ 56''.$$

EJEMPLO 3. Reducir 205° a radianes.

Solución. Como $1^\circ = 0{,}017453 \left(= \frac{\pi}{180}\right)$ radián,

$$205^\circ = 205\,(0{,}017453) \text{ radianes,}$$

$$= 3{,}5779 \text{ radianes.}$$

EJEMPLO 4. Reducir 25° 13′ 16″ a radianes.

Solución. Reduciremos primero los minutos y los segundos a fracción decimal de grado. Tendremos:

$$25^\circ\, 13'\, 16'' = 25{,}2214^\circ.$$

Por tanto, $25{,}2214^\circ = 25{,}2214\,(0{,}017453)$ radián,

$$= 0{,}44019 \text{ radián.}$$

EJEMPLO 5. ¿Cuál es la medida circular del ángulo correspondiente a un arco cuya longitud es de 3,7 cm si el radio del círculo es de 2 cm? Expresar también el ángulo en grados.

Solución. Sustituyendo en **(37)**, tenemos

$$\text{medida en radianes} = \frac{3{,}7}{2} = 1{,}85.$$

Para reducir este ángulo a grados tenemos, de **(35)**,

$$1{,}85 \times 57{,}2958^\circ = 105{,}997^\circ.$$

EJEMPLO 6. ¿Cuál es el radio de un círculo en el cual un arco de longitud igual a 64 cm corresponde a un ángulo de 2,5 radianes?

Solución. Sustituyendo en **(37)**, $2{,}5 = \frac{64}{R}$,

$$R = 25{,}6 \text{ cm.}$$

PROBLEMAS

Los siguientes ángulos están dados en medida circular. Expresarlos en grados.

1. $\frac{\pi}{3}$. *Solución.* 60°. **2.** $\frac{\pi}{4}$.

3. $-\frac{\pi}{2}$. *Solución.* -90°. **4.** $\frac{4\pi}{3}$.

5. $-\frac{7\pi}{5}$. *Solución.* $-252°$. **6.** $-\frac{5\pi}{6}$.

7. 1,3. *Solución.* 74° 29′ 4″. **8.** ½.

9. $-2{,}5$. *Solución.* $-143° 14' 22''$. **10.** -3.

11. $\frac{\pi+1}{6}$. *Solución.* 39° 32′ 57″. **12.** $\frac{3\pi+2}{5}$.

Expresar los siguientes ángulos en radianes:

13. $22\frac{1}{2}°$. *Solución.* $\frac{\pi}{8}$. **14.** 60°.

15. 135°. *Solución.* $\frac{3\pi}{4}$. **16.** $-720°$.

17. 990°. *Solución.* $\frac{11\pi}{2}$. **18.** $-120°$.

19. $-100{,}28°$. *Solución.* $-1{,}7502$. **20.** 45,6°.

21. 142° 43,2′. *Solución.* 2,4909. **22.** $-243{,}87°$.

23. 125° 23′ 19″. *Solución.* 2,1884. **24.** 205° 35,4′.

Dar los valores de las siguientes funciones:

25. $\operatorname{sen}\frac{\pi}{3}$. *Solución.* $\frac{\sqrt{3}}{2}$. **26.** $\cos\frac{\pi}{4}$.

27. $\operatorname{tg}\left(-\frac{5\pi}{6}\right)$. *Solución.* $\frac{\sqrt{3}}{3}$. **28.** $\operatorname{ctg}\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

29. $\sec\frac{5\pi}{4}$. *Solución* $-\sqrt{2}$. **30.** $\operatorname{sen}\left(-\frac{11\pi}{2}\right)$.

Hallar los valores de θ comprendidos entre 0 y 2π que satisfacen a cada una de las siguientes ecuaciones (θ es la letra griega "theta"):

31. $\operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}$. *Solución.* $\frac{\pi}{6}$, $\frac{5\pi}{6}$. **32.** $\cos\theta = -\frac{1}{2}$.

33. $\operatorname{tg}\theta = -1$. *Solución.* $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$. **34.** $\csc\theta = \frac{2\sqrt{3}}{3}$.

35. sen $\theta = -\frac{\sqrt{2}}{2}$. *Solución.* $\frac{5\pi}{4}$, $\frac{7\pi}{4}$. **36.** $\operatorname{tg}\theta = \sqrt{3}$.

37. $\operatorname{ctg}\theta + \sqrt{3} = 0$. *Solución.* $\frac{5\pi}{6}$, $\frac{11\pi}{6}$. **38.** $\sqrt{3}\sec\theta + 2 = 0$.

39. Expresar en grados y en radianes:

a. Siete décimos de cuatro ángulos rectos.

b. Cinco cuartos de dos ángulos rectos.

c. Dos tercios de un ángulo recto.

Solución. *a*) $252°$, $\frac{7\pi}{5}$; *b*) $225°$, $\frac{5\pi}{4}$; *c*) $60°$, $\frac{\pi}{3}$.

40. Hallar en radianes la medida del ángulo correspondiente a un arco cuya longitud es de 37,5 m en un círculo de 25 m de radio.

41. Hallar la longitud del arco correspondiente a un ángulo de 4,5 radianes en un círculo cuyo radio es 25 m.

Solución 112,5 metros.

42. Hallar la longitud del radio de un círculo en el que un arco cuya longitud es de 9,6 m corresponde a un ángulo central de 1,2 radianes.

43. Hallar la longitud de un arco de $80°$ en un círculo de 4 metros de radio. *Solución.* 5,6 metros.

44. Hallar en grados la medida de un ángulo central que en un círculo de radio 10 m le corresponde un arco de 5π metros.

45. Hallar en radianes la medida de un ángulo central que en un círculo de radio $3\frac{2}{11}$ cm le corresponde un arco de 24 centímetros.

Solución. 7,54.

46. ¿Cuánto tiempo tarda la manecilla de los minutos de un reloj en girar un ángulo de $-1\frac{2}{3}$ radianes?

47. ¿Qué ángulo, en medida circular, describe la manecilla de las horas de un reloj en 39 minutos y $22\frac{1}{2}$ segundos?

Solución. $-\frac{7\pi}{64}$ radianes.

48. Un volante da 10 revoluciones por segundo. ¿Cuánto tiempo tarda en recorrer 2 radianes, si se toma $\pi = \frac{22}{7}$?

49. Un tren camina sobre una curva de medio kilómetro de radio a la velocidad de 20 Km por hora. Hallar qué ángulo recorre en 10 segundos. *Solución.* $6\frac{4}{11}$ grados.

50. El radio de una rueda de un vagón es 1,5 metros. ¿Qué ángulo gira la rueda cuando el vagón recorre una distancia de 3 metros?

51. El ángulo bajo el cual se ve el diámetro del Sol es aproximadamente de medio grado. Hallar un valor aproximado del diámetro del Sol si su distancia del observador es 150000000 kilómetros.

Solución. 1350000 kilómetros.

23. Reducción de funciones trigonométricas a funciones de ángulos agudos. Los valores de las funciones trigonométricas de los diferentes ángulos están dados en tablas trigonométricas análogas a las que dimos en el Artículo 7. Estas tablas, sin embargo, dan solamente las funciones trigonométricas de los ángulos comprendidos entre 0° y 90°, y en la práctica tenemos que tratar algunas veces con ángulos positivos mayores de 90° y también con ángulos negativos. A continuación demostraremos que las funciones trigonométricas de un ángulo de cualquier magnitud, positivo o negativo, pueden expresarse en términos de las funciones trigonométricas de un ángulo positivo menor de 90°, es decir, de un ángulo agudo. También demostraremos, aunque esto es de menor importancia, que las funciones de cualquier ángulo pueden encontrarse cuando se conocen las de un ángulo positivo no mayor de 45°.

24. Funciones trigonométricas de ángulos complementarios. Para que sea completa nuestra discusión recordemos lo dicho en el Artículo 4:

Teorema. *Una función trigonométrica de un ángulo agudo es igual a la cofunción de su ángulo complementario.*

Ejemplo. Expresar sen 72° como una función de un ángulo positivo menor de 45°.

Solución. Como $90° - 72° = 18°$, resulta que 72° y 18° son complementarios, y tenemos que sen 72° = cos 18°.

PROBLEMAS

1. Expresar las siguientes funciones trigonométricas en función de las del ángulo complementario:

a. cos 68°.
b. tg 48,6°.
c. sec 81°16′.
d. sen $\frac{\pi}{3}$.
e. ctg 9,167°.
f. sen 72° 51′ 43″.
g. cos $\frac{\pi}{6}$.
h. sec 19° 29,8′.
i. csc 52° 18′.
j. ctg $\frac{2\pi}{5}$.
k. sen 1,2.
l. tg 66° 22,3′.

2. Demostrar que en un triángulo rectángulo una función cualquiera de uno de los ángulos agudos es igual a la cofunción del otro ángulo agudo.

3. Si A, B, C son los ángulos de un triángulo cualquiera, demostrar que

$$\text{sen } \tfrac{1}{2} A = \cos \tfrac{1}{2} (B+C).$$

25. Fórmulas de reducción para ángulos comprendidos en el segundo cuadrante. ***Primer método.*** Sea OB_2 (fig. 35) el lado terminal de un ángulo cualquiera comprendido en el segundo cuadrante. Las funciones de este ángulo son las mismas que las funciones correspondientes del ángulo positivo XOB_2. Según puede verse en la figura:

(1) $\quad$ ángulo $XOB_2 = 180° -$ ángulo B_2OX'.

Sea A la medida del ángulo agudo B_2OX'. Entonces, de (1), tenemos

(2) $\quad$ ángulo Y

Construyamos en el primer cuadrante el ángulo

$$XOB_1 = \text{ángulo } B_2OX' = A.$$

Tomemos $OP_1 = OP_2 = r$, y tracemos las ordenadas M_1P_1 y M_2P_2. Los triángulos rectángulos OM_1P_1 y OM_2P_2 son iguales.

Se trata de comparar los valores de las funciones trigonométricas de los ángulos suplementarios A y $180° - A$. Según la figura,

$$\text{para } P_1, \quad x = OM_1 = a, \quad y = M_1P_1 = b;$$

$$\text{para } P_2, \quad x = OM_2 = -a, \quad y = M_2P_2 = b.$$

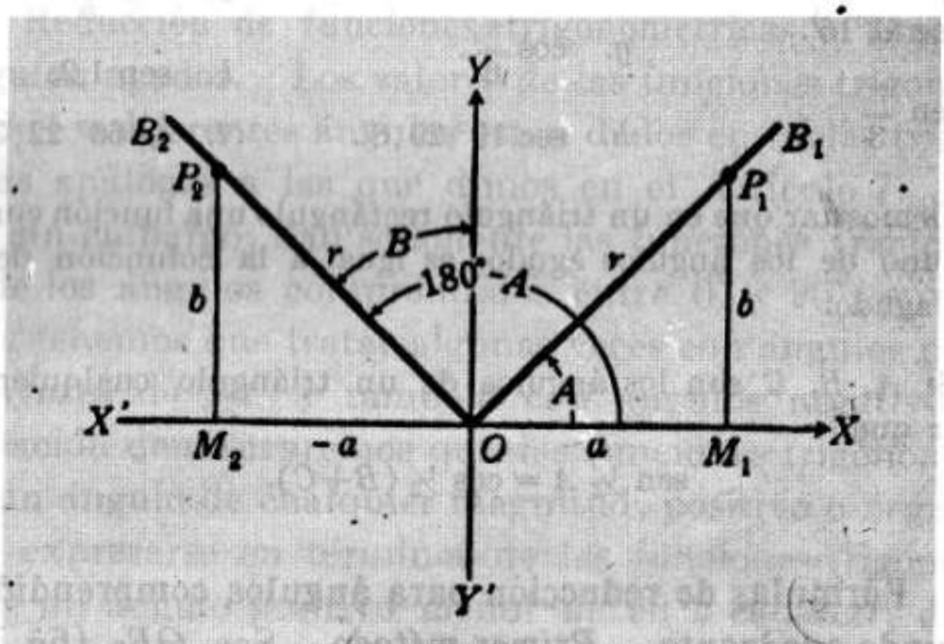


Fig 35

Por tanto, las fórmulas (7), (8) y (9) del (Art. 13), nos dan:

$$(3) \quad \begin{cases} \text{sen } (180° - A) = \dfrac{b}{r}, & \text{sen } A = \dfrac{b}{r}; \\ \cos (180° - A) = -\dfrac{a}{r}, & \cos A = \dfrac{a}{r}; \\ \text{tg } (180° - A) = -\dfrac{b}{a}, & \text{tg } A = \dfrac{b}{a}; \end{cases}$$

y las fórmulas (10), (11) y (12) nos dan

$$(3)\quad \begin{cases} \operatorname{ctg}(180^\circ - A) = -\dfrac{a}{b}, & \operatorname{ctg} A = \dfrac{a}{b}; \\[2ex] \sec(180^\circ - A) = -\dfrac{r}{a}, & \sec A = \dfrac{r}{a}; \\[2ex] \csc(180^\circ - A) = \dfrac{r}{b}, & \csc A = \dfrac{r}{b}. \end{cases}$$

Y, por comparación, hallamos

$$(4)\quad \begin{cases} \operatorname{sen}(180^\circ - A) = \operatorname{sen} A; \\ \cos(180^\circ - A) = -\cos A; \\ \operatorname{tg}(180^\circ - A) = -\operatorname{tg} A; \\ \csc(180^\circ - A) = \csc A; \\ \sec(180^\circ - A) = -\sec A; \\ \operatorname{ctg}(180^\circ - A) = -\operatorname{ctg} A. \end{cases}$$

En consecuencia, tenemos el siguiente

Teorema. *Las funciones de un ángulo comprendido en el segundo cuadrante son iguales, en valor absoluto, a las funciones del mismo nombre del ángulo agudo comprendido entre su lado final y el lado terminal de* 180°. *Los signos algebraicos son los que corresponden a las funciones de un ángulo del segundo cuadrante.*

El lector observará que era absolutamente necesario escribir las igualdades (3). A los puntos P_1 y P_2 les corresponden radios iguales, ordenadas iguales y abscisas que difieren solamente en el signo. Las igualdades (4) y el teorema son obvios.

Algunos autores, al "ángulo agudo" al que se refiere este teorema, que en este caso es el suplemento del ángulo dado, le llaman *ángulo relacionado*. Por ejemplo, el ángulo relacionado de $165°$ es $15°$.

EJEMPLO 1. Expresar sen 123° como una función de un ángulo agudo, y hallar su valor.

Solución. Como $180°-123°=57°$, el ángulo relacionado es $57°$.

$$\text{sen } 123° = \text{sen } (180°-57°) = \text{sen } 57° = 0{,}8387.$$

EJEMPLO 2. Hallar el valor de $\sec \frac{5\pi}{6}$.

Solución. $\sec \frac{5\pi}{6} = \sec 150° = \sec (180°-30°) = -\sec 30°$

$$= -\frac{2}{\sqrt{3}}.$$

EJEMPLO 3. Hallar $\text{tg } 516°$.

Solución. $516°$ es un ángulo del segundo cuadrante, porque

$$516°-360° = 156°.$$

Por tanto, $\text{tg } 516° = \text{tg } 156°$ * $= \text{tg } (180°-24°) = -\text{tg } 24°$

$$= -0{,}4452.$$

Segundo método. El ángulo XOB_2 puede escribirse también $90°+B$, en donde B mide el ángulo agudo YOB_2. Como los ángulos YOB_2 y B_2OX' son complementarios, tenemos, por el teorema del Artículo 24,

$$\text{sen } A = \cos B; \qquad \csc A = \sec B;$$
$$\cos A = \text{sen } B; \qquad \sec A = \csc B;$$
$$\text{tg } A = \text{ctg } B; \qquad \text{ctg } A = \text{tg } B.$$

* El teorema anterior fué demostrado para un ángulo de cualquier magnitud cuyo lado terminal esté en el segundo cuadrante. La recta generatriz del ángulo puede haber dado una o más revoluciones com-

Como $180° - A = 90° + B$, obtenemos, combinando estos resultados con los expresados en las igualdades (4), las siguientes igualdades:

$$
(5) \qquad \left\{
\begin{array}{l}
\operatorname{sen}\,(90° + B) = \cos\,B; \\
\cos\,(90° + B) = -\operatorname{sen}\,B; \\
\operatorname{tg}\,(90° + B) = -\operatorname{ctg}\,B; \\
\csc\,(90° + B) = \sec\,B; \\
\sec\,(90° + B) = -\csc\,B; \\
\operatorname{ctg}\,(90° + B) = -\operatorname{tg}\,B.
\end{array}
\right.
$$

En consecuencia, tenemos el siguiente

Teorema. *Las funciones de un ángulo del segundo cuadrante son iguales, en valor absoluto, a las cofunciones de igual nombre del ángulo agudo comprendido entre su lado final y el lado terminal de* $90°$. *Los signos algebraiccs son los que corresponden a un ángulo del segundo cuadrante.*

EJEMPLO 4. Hallar el valor de $\cos 109°$ por el segundo método.

Solución. Como $109° = 90° + 19°$,

$$\cos 109° = \cos\,(90° + 19°) = -\operatorname{sen} 19° = -0,3256.$$

EJEMPLO 5. Hallar el valor de $\cos \frac{19\pi}{4}$ por el segundo método.

Solución. $\frac{19\pi}{4} = 855° = 720° + 135°$. Por lo tanto.

$$\cos \frac{19\pi}{4} = \cos 855° = \cos 135° = \cos\,(90° + 45°) = -\operatorname{sen} 45° = -\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

---

pletas antes de tomar la posición del lado final. En ese caso, restaremos primero del ángulo (si las revoluciones han sido de sentido contrario al de las agujas de un reloj, es decir, de dirección positiva) un múltiplo tal de $360°$ que la diferencia sea un ángulo positivo menor de $360°$.

Los dos métodos anteriores nos permiten hacer la misma cosa, a saber, *cómo encontrar las funciones trigonométricas de un ángulo del segundo cuadrante cuando se conocen las funciones de un ángulo agudo*. El primer método es de preferencia, ya que en él el nombre de la función no cambia y tenemos por eso menos probabilidades de cometer un error.

PROBLEMAS

1. Usando las fórmulas (4) (Art. 25) construir una tabla de senos, cosenos y tangentes para los ángulos desde 0° a 180° a intervalos de 30°.

Solución.

	0°	30°	60°	90°	120°	150°	180°
sen	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0
cos	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

2. Usando la tabla del Artículo 7 y las fórmulas (4) (Art. 25) construir una tabla de senos, cosenos y tangentes de todos los ángulos desde 90° a 180° a intervalos de 15°.

Reducir las siguientes funciones a otras de un ángulo agudo:

3. sen 111°. *Solución.* sen 69°, ó cos 21°.

4. cos 115°.

5. cos 165° 20′. *Solución.* −sen 75° 20′, ó −cos 14° 40′.

6. tg 170,48°.

7. $\operatorname{tg} \frac{4\pi}{5}$. *Solución.* $-\operatorname{tg} \frac{\pi}{5}$, ó $-\operatorname{ctg} \frac{3\pi}{10}$.

8. $\operatorname{ctg} \frac{13\pi}{5}$.

9. sec 883°. *Solución.* $-\sec 17°$, ó $-\csc 73°$. **10.** csc 758°.

11. csc 2. *Solución.* csc 1,14, ó sec 0,43. **12.** sec 2,2.

Hallar los valores de las siguientes funciones:

13. sen 133°. *Solución.* 0,7314. **14.** cos 175°.

15. cos 160°. *Solución.* −0,9397. **16.** tg 131°.

17. $\operatorname{tg}\frac{3\pi}{4}$. *Solución.* −1. **18.** $\operatorname{ctg}\frac{11\pi}{4}$.

19. csc 870°. *Solución.* 2. **20.** sen 1200°.

21. sec 135°. *Solución.* $-\sqrt{2}$. **22.** sec 131°.

23. ctg 852°. *Solución.* −0,9004. **24.** csc 491°.

Reducir las siguientes funciones a otras de un ángulo agudo menor de 45°:

25. sen 106°. *Solución.* cos 16°. **26.** tg 862°.

27. cos 148,3°. *Solución.* −cos 31,7°. **28.** $\operatorname{ctg}\frac{11\pi}{12}$.

29. sec 794° 52′. *Solución.* csc 15° 8′. **30.** $\csc\frac{23\pi}{9}$.

26. Fórmulas de reducción para ángulos comprendidos en el tercer cuadrante. ***Primer método.*** Las funciones de un ángulo cualquiera del tercer cuadrante cuyo lado final sea OB_3 (fig. 36) son las mismas que las funciones correspondientes del ángulo positivo XOB_3, y según la figura:

(1) $$\text{ángulo } XOB_3 = 180° + \text{ángulo } X'OB_3.$$

Sea A la medida del ángulo agudo $X'OB_3$. Construyamos en el primer cuadrante,

$$\text{ángulo } XOB_1 = \text{ángulo } X'OB_3 = A,$$

y completemos la figura tal como hicimos en el caso del artículo anterior. Las coordenadas de P_1 son (a, b). Las coordenadas de P_3 son $(-a, -b)$, y

$$OP_1 = OP_3 = r.$$

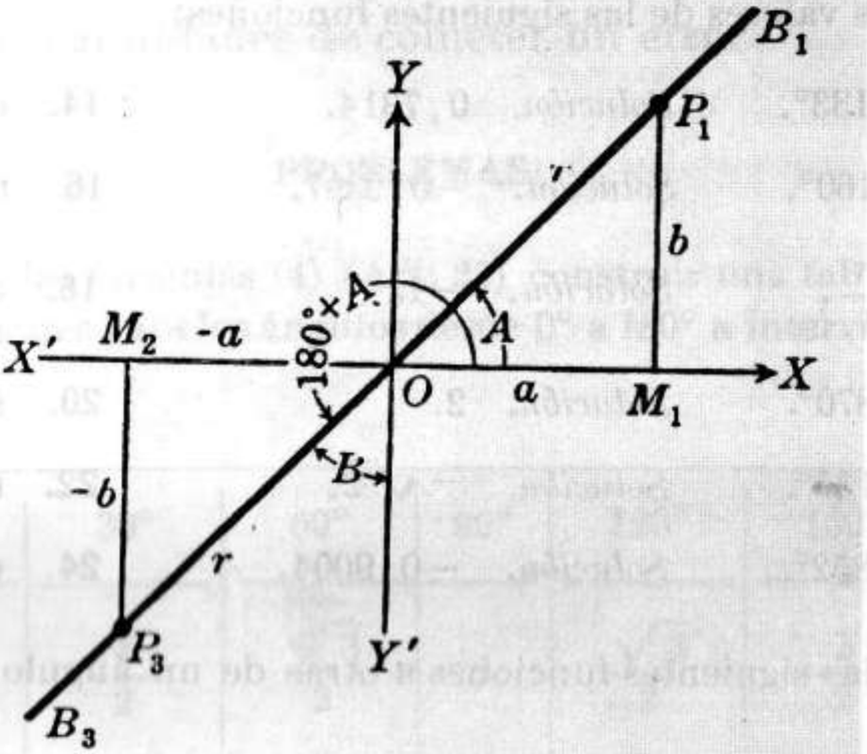


Fig. 36

Por lo tanto, para los ángulos de $180° + A$ ($\angle XOB_3$) y A ($\angle XOB_1$),

$$\operatorname{sen}(180° + A) = -\operatorname{sen} A; \quad \csc(180° + A) = -\csc A;$$
$$\cos(180° + A) = -\cos A; \quad \sec(180° + A) = -\sec A;$$
$$\operatorname{tg}(180° + A) = \operatorname{tg} A; \quad \operatorname{ctg}(180° + A) = \operatorname{ctg} A.$$

En consecuencia, tenemos el siguiente

Teorema. *Las funciones de un ángulo del tercer cuadrante son iguales en valor absoluto a las funciones del mismo nombre del ángulo agudo comprendido entre su lado terminal y el lado final de* 180°. *Los signos algebraicos son los que corresponden a un ángulo del tercer cuadrante.*

Al "ángulo agudo" al que se refiere este teorema algunos autores le llaman *ángulo relacionado*. Así, por ejemplo, el ángulo relacionado para 215° es 35°.

EJEMPLO 1. Expresar $\cos 217^\circ$ como una función de un ángulo agudo, y hallar su valor.

Solución. Como $217^\circ - 180^\circ = 37^\circ$, el ángulo relacionado es 37°.

$$\cos 217^\circ = \cos(180^\circ + 37^\circ) = -\cos 37^\circ = -0,7986.$$

EJEMPLO 2. Hallar el valor de $\csc 225^\circ$.

Solución. $\csc 225^\circ = \csc(180^\circ + 45^\circ) = -\csc 45^\circ = -\sqrt{2}$.

EJEMPLO 3. Hallar el valor de sen 600°.

Solución. 600° es un ángulo del tercer cuadrante, porque

$$600^\circ - 360^\circ = 240^\circ.$$

Por tanto, $\operatorname{sen} 600^\circ = \operatorname{sen} 240^\circ = \operatorname{sen}(180^\circ + 60^\circ) = -\operatorname{sen} 60^\circ$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Segundo método. El ángulo XOB_3 puede escribirse también $270^\circ - B$, en donde B mide el ángulo agudo B_3OY'. Como los ángulos B_3OY' y $X'OB_3$ ($= \angle XOB_1$) son complementarios tenemos, por el teorema del Artículo 24, combinado con los resultados anteriores, y recordando que $180^\circ + A = 270^\circ - B$,

$$\operatorname{sen}(270^\circ - B) = -\cos B; \quad \csc(270^\circ - B) = -\sec B;$$
$$\cos(270^\circ - B) = -\operatorname{sen} B; \quad \sec(270^\circ - B) = -\csc B;$$
$$\operatorname{tg}(270^\circ - B) = \operatorname{ctg} B; \quad \operatorname{ctg}(270^\circ - B) = \operatorname{tg} B.$$

En consecuencia, tenemos el siguiente

Teorema. *Las funciones de un ángulo del tercer cuadrante son iguales, en valor absoluto, a las cofunciones del mismo nom-*

bre del ángulo comprendido entre su lado terminal y el lado final de $270°$. *Los signos algebraicos son los que corresponden a un ángulo del tercer cuadrante.*

EJEMPLO 4. Hallar sen $259°$ por el segundo método.

Solución. $\text{sen } 259° = \text{sen } (270° - 11°) = -\cos 11° = -0{,}9816.$

El primer método es generalmente preferible.

PROBLEMAS

1. Construir una tabla de senos, cosenos y tangentes de todos los ángulos desde $0°$ a $270°$ a intervalos de $45°$.

Solución.

	$0°$	$45°$	$90°$	$135°$	$180°$	$225°$	$270°$
sen	0	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1
cos	1	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{2}}$	0
tg	0	1	∞	-1	0	1	∞

2. Construir una tabla de senos, cosenos y tangentes de todos los ángulos desde $180°$ a $270°$ a intervalos de $15°$, usando la tabla del Artículo 7.

Reducir las siguientes funciones a otras de un ángulo agudo:

3. $\cos 212°$. *Solución.* $-\cos 32°$, ó $-\text{sen } 58°$.

4. $\text{sen } 263°$.

5. $\text{sen } 582°$. *Solución.* $-\text{sen } 42°$, ó $-\cos 48°$.

6. $\text{ctg } 570°$.

7. $\operatorname{tg}\frac{6\pi}{5}$. *Solución.* $\operatorname{tg}\frac{\pi}{5}$, ó $\operatorname{ctg}\frac{3\pi}{10}$.

8. $\cos\frac{8\pi}{7}$.

9. $\sec 255°$. *Solución.* $-\sec 75°$, ó $-\csc 15°$.

10. $\csc 607°$.

11. $\csc 910°$. *Solución.* $-\csc 10°$, ó $-\sec 80°$.

12. $\operatorname{tg}\frac{10\pi}{9}$.

Expresar las siguientes funciones como otras de un ángulo agudo menor de 45°:

13. $\cos\frac{17\pi}{12}$. *Solución.* $-\operatorname{sen}\frac{\pi}{12}$.

14. $\sec\frac{5\pi}{4}$.

15. $\operatorname{tg} 236,5°$. *Solución.* $\operatorname{ctg} 33,5°$.

16. $\operatorname{sen}\frac{23\pi}{7}$.

17. $\operatorname{sen} 594°$. *Solución.* $-\cos 36°$.

18. $\cos 260°\ 53,4'$.

Hallar los valores de las siguientes funciones:

19. $\operatorname{sen} 216°$. *Solución.* $-0,5878$.

20. $\cos 193°$.

21. $\operatorname{ctg} 572°$. *Solución.* $1,6003$.

22. $\operatorname{tg} 622°$.

23. $\operatorname{tg}\frac{6\pi}{5}$. *Solución.* $0,7265$.

24. $\csc\frac{8\pi}{7}$.

25. $\sec 930°$. *Solución.* $-\frac{2\sqrt{3}}{3}$.

26. $\operatorname{sen}\frac{7\pi}{5}$.

27. Fórmulas de reducción para ángulos comprendidos en el cuarto cuadrante. ***Primer método.*** Las funciones de un ángulo del cuarto cuadrante cuyo lado final sea OB_4 (fig. 37) son las mismas que las funciones correspondientes del ángulo positivo XOB_4, y

$$(1) \qquad \text{ángulo } XOB_4 = 360° - A,$$

siendo A la medida del ángulo agudo B_4OX. Los triángulos rectángulos OMP_1 y OMP_4 son iguales. Las coordenadas de P_1 son (a, b). Las coordenadas de P_4 son $(a, -b)$, y

$$OP_1 = OP_4 = r.$$

Por tanto, para los ángulos

$$360° - A\ (= \angle XOB_4) \ \text{ y } \ A\ (= \angle XOB_1),$$

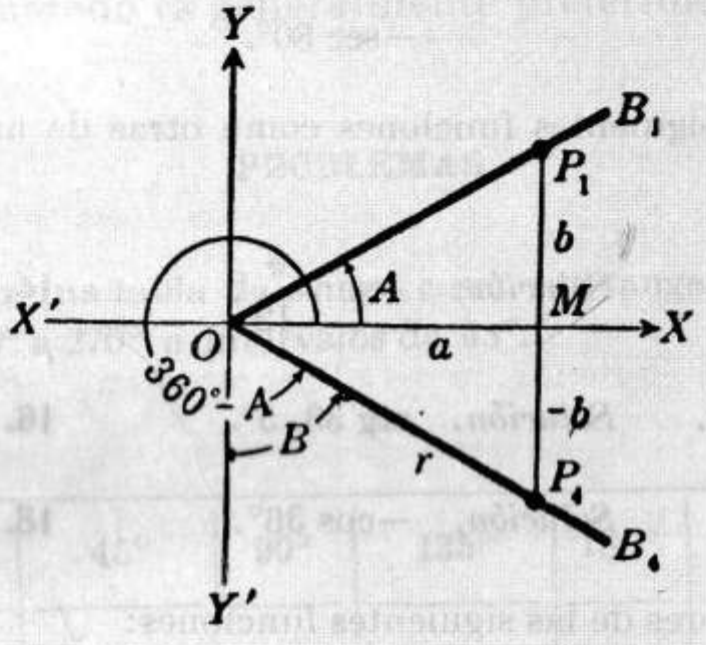


Fig. 37

tendremos:

$$\operatorname{sen}(360° - A) = -\operatorname{sen} A; \quad \csc(360° - A) = -\csc A;$$
$$\cos(360° - A) = \cos A; \quad \sec(360° - A) = \sec A;$$
$$\operatorname{tg}(360° - A) = -\operatorname{tg} A; \quad \operatorname{ctg}(360° - A) = -\operatorname{ctg} A.$$

En consecuencia, tenemos el siguiente

Teorema. *Las funciones de un ángulo del cuarto cuadrante son iguales, en valor absoluto, a las funciones del mismo nombre del ángulo agudo comprendido entre su lado terminal y el lado final de* $360°$. *Los signos algebraicos son los que corresponden a un ángulo del cuarto cuadrante.*

Al "ángulo agudo" a que se refiere este teorema se le suele llamar *ángulo relacionado.*

EJEMPLO 1. Expresar sen 327° como una función de un ángulo agudo y hallar su valor.

Solución. Como $360°-327°=33°$, el ángulo relacionado es 33°.

$$\text{sen } 327° = \text{sen } (360°-33°) = -\text{sen } 33° = -0\ 5446.$$

EJEMPLO 2. Hallar el valor de $\text{ctg } \frac{5\pi}{3}$.

Solución. $\text{ctg } \frac{5\pi}{3} = \text{ctg } 300° = \text{ctg } (360°-60°) = -\text{ctg } 60°$

$$= -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$

EJEMPLO 3. Hallar el valor de cos 1000°.

Solución. Este es un ángulo del cuarto cuadrante, porque

$$1\,000° - 720° = 280°.$$

Por tanto, $\cos 1\,000° = \cos 280° = \cos (360° - 80°) = \cos 80°$

$$= 0,1736.$$

Segundo método. El ángulo positivo XOB_4 puede escribirse también $270°+B$, en donde B mide el ángulo agudo $Y'OB_4$. Como los ángulos $Y'OB_4$ y B_4OX son complementarios tenemos, por el teorema del Artículo 24 combinado con los resultados anteriores, y recordando que $360°-A=270°+B$,

$$\text{sen } (270°+B) = -\cos B; \quad \csc (270°+B) = -\sec B;$$

$$\cos (270°+B) = \text{sen } B; \quad \sec (270°+B) = \csc B;$$

$$\text{tg } (270°+B) = -\text{ctg } B; \quad \text{ctg } (270°+B) = -\text{tg } B.$$

En consecuencia, tenemos el siguiente

Teorema. *Las funciones de un ángulo del cuarto cuadrante son iguales, en valor absoluto, a las cofunciones del mismo nombre del ángulo agudo comprendido entre su lado terminal y el lado final de* 270°. *Los signos algebraicos son los que corresponden a las funciones de un ángulo del cuarto cuadrante.*

Ejemplo 4. Hallar el valor de $\cos \frac{11\pi}{6}$ por el segundo método.

Solución. $\cos\frac{11\pi}{6} = \cos 330° = \cos(270°+60°) = \operatorname{sen} 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

Como anteriormente, el primer método es generalmente preferible.

PROBLEMAS

1. Construir una tabla de senos, cosenos y tangentes de todos los ángulos desde 180° a 360° a intervalos de 30°.

Solución.

	180°	210°	240°	270°	300°	330°	360°
sen	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
cos	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
tg	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\sqrt{3}$	∞	$-\sqrt{3}$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0

2. Construir una tabla de senos, cosenos y tangentes de todos los ángulos desde 270° a 360° a intervalos de 15°, usando la tabla del Artículo 7.

Reducir las siguientes funciones a otras equivalentes de un ángulo agudo:

3. sen 291°. *Solución.* $-\operatorname{sen} 69°$, ó $-\cos 21°$.

4. cos 316°.

5. cos 333,3°. *Solución.* cos 26,7°, ó sen 63,3°.

6. ctg 669,3°.

7. tg 700°. *Solución.* $-\operatorname{tg} 20°$, ó $-\operatorname{ctg} 70°$.

8. sen 289° 16′.

9. $\csc \frac{9\pi}{5}$. *Solución.* $-\csc \frac{\pi}{5}$, ó $-\sec \frac{3\pi}{10}$. **10.** $\sec \frac{35\pi}{}$.

11. ctg 5,2. *Solución.* $-$ctg 1,08, ó $-$tg 0,49. **12.** tg 275,5°.

Hallar los valores de las siguientes funciones:

13. sen 301°. *Solución.* $-0,8572$. **14.** cos 342°.

15. cos 353°. *Solución.* 0,9925. **16.** sen 317°.

17. tg 703°. *Solución.* $-0,3057$. **18.** ctg 659°.

19. $\operatorname{ctg} \frac{7\pi}{4}$. *Solución.* -1. **20.** $\operatorname{tg} \frac{9\pi}{5}$.

21. $\sec \frac{23\pi}{6}$. *Solución.* $\frac{2\sqrt{3}}{3}$. **22.** $\csc \frac{17\pi}{9}$.

23. csc 675°. *Solución.* $-\sqrt{2}$. **24.** sec 701°.

28. Reducción de funciones de ángulos negativos. Existen relaciones sencillas entre las funciones de los ángulos A y $-A$ siendo A un ángulo cualquiera. Es evidente que

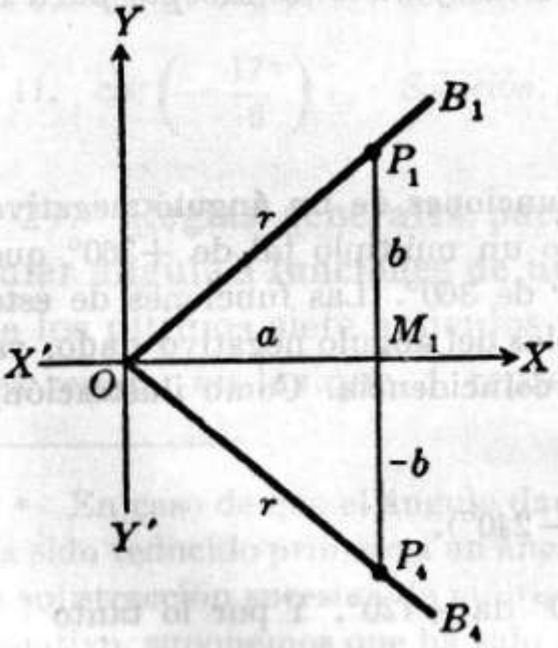


Fig. 38

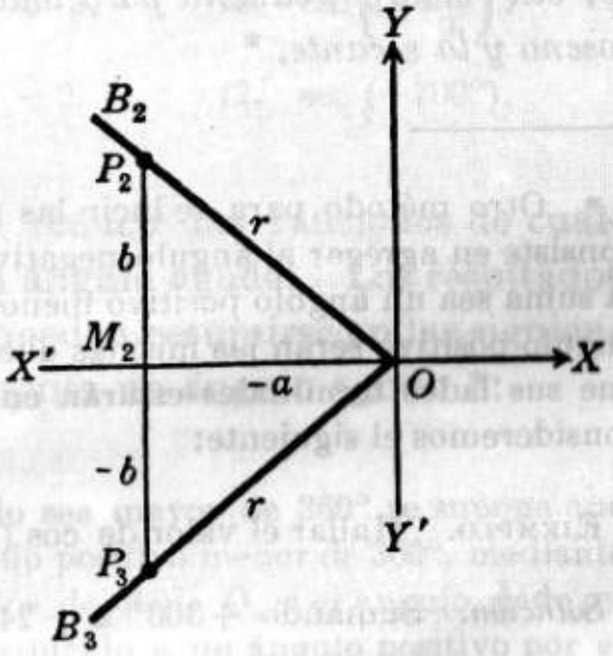


Fig. 39

A y $-A$ estarán uno en el primer cuadrante y el otro en el cuarto, como los ángulos XOB_1 y XOB_4 (fig. 38); o uno estará en el segundo cuadrante y el otro en el tercero, como los ángulos XOB_2 y XOB_3 (fig. 39).

En cualquiera de las dos figuras, los puntos escogidos sobre los lados finales tienen la misma abscisa e iguales radios, y sus ordenadas difieren solamente en el signo. Entonces, entre las funciones de los ángulos XOB_1 y XOB_4 de la figura 38, y XOB_2 y XOB_3 de la figura 39, obtenemos las siguientes relaciones:

$$\text{sen}\,(-A) = -\text{sen}\,A; \qquad \csc\,(-A) = -\csc\,A;$$

$$\cos\,(-A) = \cos\,A; \qquad \sec\,(-A) = \sec\,A;$$

$$\text{tg}\,(-A) = -\text{tg}\,A; \qquad \text{ctg}\,(-A) = -\text{ctg}\,A.$$

En consecuencia, tenemos el siguiente

Teorema. *Las funciones de* $-$A *son iguales, en valor absoluto, a las funciones del mismo nombre de* A. *El signo algebraico, sin embargo, cambia para todas las funciones excepto para el coseno y la secante.* *

---

* Otro método para reducir las funciones de un ángulo negativo consiste en agregar al ángulo negativo un múltiplo tal de $+360°$ que la suma sea un ángulo positivo menor de 360°. Las funciones de este ángulo positivo serán las mismas que las del ángulo negativo dado, ya que sus lados terminales estarán en coincidencia. Como ilustración, consideremos el siguiente:

Ejemplo. Hallar el valor de $\cos\,(-240°)$.

Solución. Sumando $+360°$ a $-240°$ da $+120°$. Y por lo tanto

$$\cos\,(-240°) = \cos\,120° = \cos\,(180° - 60°) = -\cos\,60° = -\tfrac{1}{2}.$$

EJEMPLO 1. Expresar tg $(-29°)$ como una función de un ángulo agudo y hallar su valor.

Solución. $\operatorname{tg}(-29°) = -\operatorname{tg} 29° = -0,5543.$

EJEMPLO 2. Hallar el valor de sec $(-135°)$.

Solución. $\sec(-135°) = \sec 135° = \sec(180° - 45°) = -\sec 45°$

$$= -\sqrt{2}.$$

EJEMPLO 3. Hallar el valor de sen $(-540°)$.

Solución. $\operatorname{sen}(-540°) = -\operatorname{sen} 540° = -\operatorname{sen}(360° + 180°)$

$$= -\operatorname{sen} 180° = 0.$$

PROBLEMAS

Hallar los valores de las siguientes funciones:

1. sen $(-67°)$. *Solución.* $-0,9205$.
2. cos $(-292°)$.
3. cos $(-138°)$. *Solución.* $-0,7431$.
4. sen $(-400°)$.
5. tg $(-33°)$. *Solución.* $-0,6494$.
6. ctg $(-117°)$.
7. ctg $(-211°)$. *Solución.* $-1,6643$.
8. tg $(-842°)$.
9. sec $(-315°)$. *Solución.* $\sqrt{2}$.
10. $\csc\left(-\frac{8\pi}{9}\right)$.
11. $\csc\left(-\frac{17\pi}{6}\right)$. *Solución.* -2.
12. sec $(-700°)$.

29. Reglas generales para reducir las funciones de cualquier ángulo a funciones de un ángulo agudo. Los resultados de los últimos siete artículos pueden resumirse en las siguientes reglas, en las que A representa un ángulo agudo *:

---

* En caso de que el ángulo dado sea mayor de 360° se supone que ha sido reducido primero a un ángulo positivo menor de 360°, mediante la substracción sucesiva de múltiplos de 360°. O, si el ángulo dado es negativo, suponemos que ha sido reducido a un ángulo positivo por el teorema del Artículo 28.

REGLAS GENERALES

I. *Cuando el ángulo sea de* $180° \pm A$, *o de* $360° \pm A$, *sus funciones son numéricamente iguales, es decir, en valor absoluto, a las funciones* **del mismo nombre** *de* A.

II. *Cuando el ángulo sea de* $90° \pm A$, *o de* $270° \pm A$, *sus funciones son numéricamente iguales a las* ***cofunciones*** *del mismo nombre de* A.

III. *En todos los casos el signo del resultado es el que corresponde a la función buscada, en el cuadrante en que se encuentra el ángulo.*

En la regla I, al ángulo A se le suele llamar *ángulo relacionado*.

Se recomienda al lector, siempre que sea posible, el uso de la regla I, porque la probabilidad de cometer un error es menor cuando no cambia el nombre de la función durante la operación.

En los Artículos 25-28 se demostraron geométricamente las fórmulas encontradas, siendo A y B ángulos agudos. Como las tablas dan los valores de las funciones de ángulos comprendidos entre 0° y 90°, estas fórmulas proporcionan un método para hallar el valor numérico de cualquiera de las funciones de cualquier ángulo. Pero estas fórmulas también son verdaderas cuando A y B no son agudos. Las demostraciones de esto, que son analíticas, se darán posteriormente. Una demostración geométrica, en cualquier caso dado, se puede obtener de una manera análoga a como veremos en el problema 45 del siguiente grupo.

PROBLEMAS

Reducir las siguientes funciones a otras de un ángulo agudo positivo.

1. sen 138°. *Solución.* sen 42°. **2.** tg 200°.

3. cos (−30°). *Solución.* cos 30°. **4.** tg 883°.

5. $\operatorname{ctg}\frac{4\pi}{5}$. *Solución.* $-\operatorname{ctg}\frac{\pi}{5}$. **6.** $\sec\left(-\frac{2\pi}{3}\right)$.

7. $\cos\frac{16\pi}{5}$. *Solución.* $-\cos\frac{\pi}{5}$. **8.** $\sec 260° 40'$.

9. $\csc 835°$. *Solución.* $\csc 65°$. **10.** $\operatorname{ctg} 356° 11'$.

11. $\operatorname{tg}\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$. *Solución.* $\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}$. **12.** $\sec(-400°)$.

13. $\cos(-135°)$. *Solución.* $-\cos 45°$. **14.** $\operatorname{tg} 275° 22'$.

15. $\operatorname{sen}\left(-\frac{17\pi}{6}\right)$. *Solución.* $-\operatorname{sen}\frac{\pi}{6}$. **16.** $\cos 1\,000°$.

Sin usar tablas, hállense los valores de las funciones trigonométricas de los siguientes ángulos. Las soluciones están dadas en el orden seno, coseno, tangente.

17. $480°$. *Solución.* $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $-\sqrt{3}$, etc.

18. $-60°$.

19. $\frac{3\pi}{4}$. *Solución.* $\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, -1, etc.

20. $-225°$.

21. $-\frac{\pi}{6}$. *Solución.* $-\frac{1}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{3}$, etc.

22. $420°$.

23. $-150°$. *Solución.* $-\frac{1}{2}$, $-\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\sqrt{3}}{3}$, etc.

24. $780°$.

25. $-495°$. *Solución.* $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, $-\frac{\sqrt{2}}{2}$, 1, etc.

26. $-315°$.

27. $-\frac{4\pi}{3}$. *Solución.* $\frac{\sqrt{3}}{2}$, $-\frac{1}{2}$, $-\sqrt{3}$, etc.

28. $-270°$.

Usando la tabla del Artículo 7, hállense los valores de las siguientes funciones:

29. sen 128°. *Solución.* 0,7880. **30.** cos 147°.

31. tg 235°. *Solución.* 1,4281. **32.** sec 100°.

33. cos (−95°). *Solución.* −0,0872. **34.** tg 687°.

35. sen 275°. *Solución.* −0,9962. **36.** ctg 1 055°.

37. $\cos \frac{15\pi}{4}$. *Solución.* 0,7071. **38.** $\operatorname{tg}\left(-\frac{4\pi}{3}\right)$.

39. csc 302°. *Solución.* −1,1792. **40.** sen 316°.

41. $\operatorname{ctg} \frac{16\pi}{5}$. *Solución.* 1,3764. **42.** cos 1 500°.

43. cos (−211°). *Solución.* −0,8572. **44.** sec (-7π).

45. Deducir, geométricamente, las fórmulas que expresan las funciones trigonométricas de $90° + B$ en términos de las funciones de B, si B está en el segundo cuadrante.

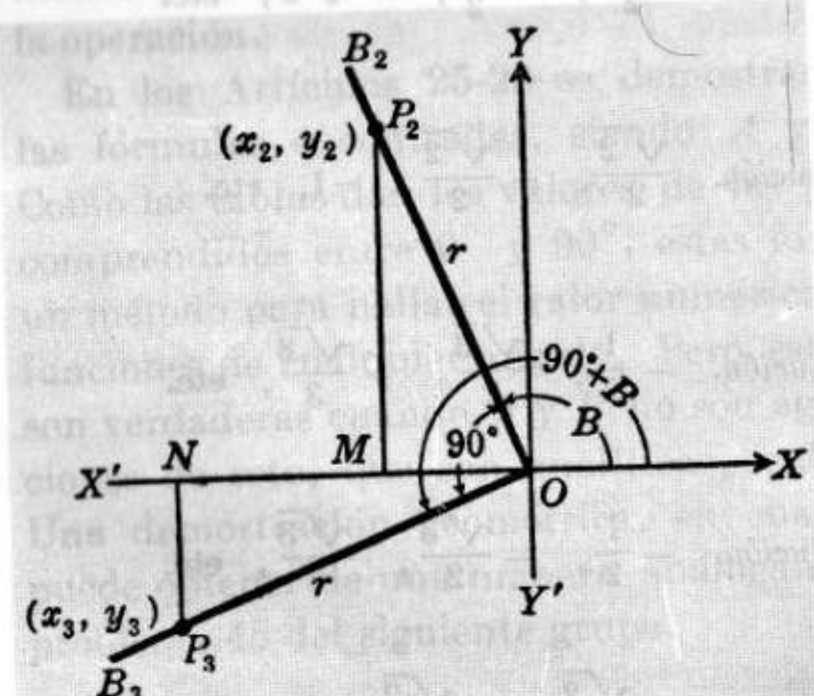


Fig. 40

Solución. Sea OB_2 (fig. 40) el lado terminal de cualquier ángulo del segundo cuadrante cuya medida sea B.

Construyamos

$$\angle XOB_3 = 90° + B.$$

Tomemos

$$OP_3 = OP_2 = r,$$

y tracemos las ordenadas MP_2 y NP_3. Designemos la posición de P_2 por sus coordenadas (x_2, y_2) y la posición de P_3 por (x_3, y_3). Es fácil ver que los triángulos rectángulos OMP_2 y ONP_3 son iguales. Por lo tanto,

$$x_3 = -y_2 \text{ e } y_3 = x_2.$$

De las definiciones de las funciones trigonométricas, se deduce:

$$\text{sen } (90^\circ + B) = \frac{y_3}{r} = \frac{x_2}{r} = \cos B;$$

$$\cos (90^\circ + B) = \frac{x_3}{r} = -\frac{y_2}{r} = -\text{sen } B;$$

$$\text{tg } (90^\circ + B) = \frac{y_3}{x_3} = -\frac{x_2}{y_2} = -\text{ctg } B;$$

$$\text{ctg } (90^\circ + B) = \frac{x_3}{y_3} = -\frac{y_2}{x_2} = -\text{tg } B;$$

$$\sec (90^\circ + B) = \frac{r}{x_3} = -\frac{r}{y_2} = -\csc B;$$

$$\csc (90^\circ + B) = \frac{r}{y_3} = \frac{r}{x_2} = \sec B.$$

Vemos, pues, que las fórmulas (5) del Artículo 25 son también verdaderas si B está en el segundo cuadrante. Por este método se puede demostrar fácilmente que son también aplicables cuando B está en el tercero o cuarto cuadrantes y que, por lo tanto, son verdaderas para *todos* los valores de B.

46. Deducir geométricamente las fórmulas que expresan las funciones de $90^\circ + B$ en términos de las funciones de B,

a) si B está en el tercer cuadrante;
b) si B está en el cuarto cuadrante.

47. Deducir geométricamente las fórmulas para las funciones de $180^\circ - A$,

a) si A está en el segundo cuadrante,
b) si A está en el tercer cuadrante.

Construyendo las figuras en cada caso para θ en el segundo, tercero y cuarto cuadrantes, respectivamente, dedúzcanse las fórmulas para las funciones trigonométricas de cada uno de los siguientes ángulos en función de las del ángulo θ.

48. $180^\circ + \theta$. **49.** $270^\circ - \theta$. **50.** $270^\circ + \theta$.

Expresar cada una de las siguientes funciones como una función de θ

51. $\text{sen } (\pi + \theta)$. *Solución.* $-\text{sen } \theta$. **52.** $\cos (270^\circ - \theta)$.

53. $\text{tg } (540^\circ + \theta)$. *Solución.* $\text{tg } \theta$. **54.** $\text{ctg } (630^\circ - \theta)$.

55. $\sec(\pi-\theta)$. *Solución.* $-\sec\theta$. **56.** $\operatorname{sen}(\theta+450^\circ)$.

57. $\cos(\theta-180^\circ)$. *Solución.* $-\cos\theta$. **58.** $\operatorname{tg}\left(\frac{3\pi}{2}-\theta\right)$.

59. $\csc\left(\theta-\frac{3\pi}{2}\right)$. *Solución.* $\sec\theta$. **60.** $\operatorname{ctg}\left(\frac{11\pi}{2}+\theta\right)$.

61. $\cos\left(\theta-\frac{5\pi}{2}\right)$. *Solución.* $\operatorname{sen}\theta$. **62.** $\operatorname{sen}(\theta-900^\circ)$.

63. $\operatorname{tg}\left(-\frac{\pi}{2}-\theta\right)$. *Solución.* $\operatorname{ctg}\theta$. **64.** $\sec\left(-\theta-\frac{3\pi}{2}\right)$.

Demostrar las siguientes igualdades:

65. $\operatorname{sen} 420^\circ \cdot \cos 390^\circ+\cos(-300^\circ)\cdot\operatorname{sen}(-330^\circ)=1$.

66. $\cos 570^\circ\cdot\operatorname{sen} 510^\circ-\operatorname{sen} 330^\circ\cdot\cos 390^\circ=0$.

67. $a\cos(90^\circ-x)+b\cos(90^\circ+x)=(a-b)\operatorname{sen} x$.

68. $m\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\cdot\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=m\operatorname{sen} x\cos x$.

69. $(a-b)\operatorname{tg}(90^\circ-x)+(a+b)\operatorname{ctg}(90^\circ+x)=(a-b)\operatorname{ctg} x-(a+b)\operatorname{tg} x$.

70. $\operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\operatorname{sen}(\pi+x)+\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)\cos(\pi-x)=0$.

71. $\cos(\pi+x)\cos\left(\frac{3\pi}{2}-y\right)-\operatorname{sen}(\pi+x)\operatorname{sen}\left(\frac{3\pi}{2}-y\right)=\cos x\operatorname{sen} y-\operatorname{sen} x\cos y$.

72. $\operatorname{tg} x+\operatorname{tg}(-y)-\operatorname{tg}(\pi-y)=\operatorname{tg} x$.

73. $\cos(90^\circ+a)\cos(270^\circ-a)-\operatorname{sen}(180^\circ-a)\operatorname{sen}(360^\circ-a)=2\operatorname{sen}^2 a$.

74. $\frac{\operatorname{sen}(180^\circ-y)}{\operatorname{sen}(270^\circ-y)}\operatorname{tg}(90^\circ+y)+\frac{1}{\operatorname{sen}^2(270^\circ-y)}=1+\sec^2 y$.

75. $3\operatorname{tg} 210^\circ+2\operatorname{tg} 120^\circ=-\sqrt{3}$.

76. $5\sec^2 135^\circ-6\operatorname{ctg}^2 300^\circ=8$.

77. $\cos\frac{1}{3}(x-270^\circ)=\operatorname{sen}\frac{1}{3}x$.

78. $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(2\pi+x)=\operatorname{tg}\frac{1}{2}x$.

79. $\csc\frac{1}{4}(x-2\pi)=-\sec\frac{1}{4}x$.

80. $\cos\frac{1}{3}(y-810^\circ)=-\operatorname{sen}\frac{1}{3}y$.

Reducir las siguientes funciones trigonométricas a otras de un ángulo menor de 45°.

81. sen 263°. *Solución.* $-\cos 7°$. **82.** cos 284°.

83. ctg 333,3°. *Solución.* $-\text{ctg}\, 26,7°$. **84.** tg 462° 15′.

85. cos 642° 10′. *Solución.* sen 12° 10′. **86.** csc 614,4°.

87. $\text{tg}\,\frac{17\pi}{10}$. *Solución.* $-\text{ctg}\,\frac{\pi}{5}$. **88.** $\text{ctg}\,\frac{8\pi}{3}$.

89. $\sec\frac{9\pi}{14}$. *Solución.* $-\csc\frac{\pi}{7}$. **90.** $\text{sen}\,\frac{37\pi}{14}$.

CAPITULO III

LINEAS TRIGONOMETRICAS Y GRAFICAS

30. Definiciones de las líneas trigonométricas. Las definiciones de las funciones trigonométricas dadas en el Artículo 13, como razones de segmentos, son fundamentales. Para

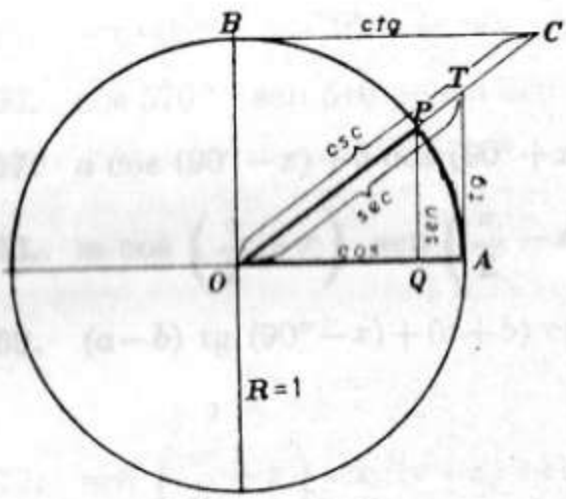


Fig. 41
Angulo en el primer cuadrante

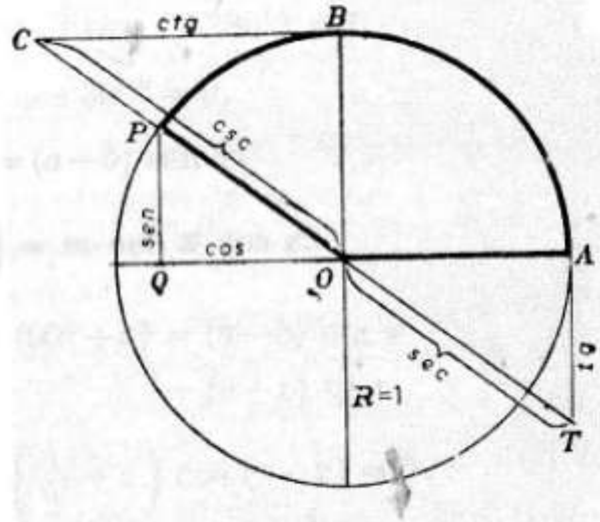


Fig. 42
Angulo en el segundo cuadrante

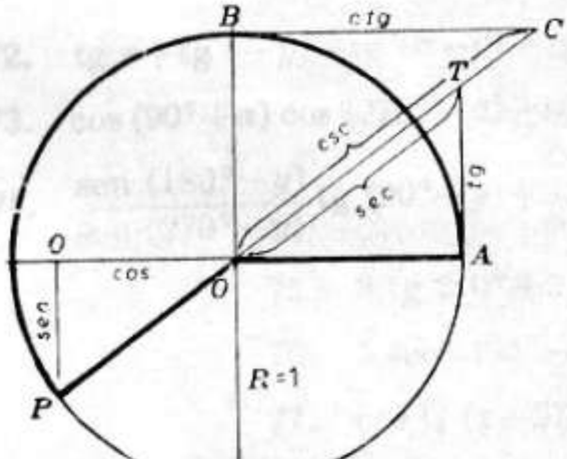


Fig. 43
Angulo en el tercer cuadrante

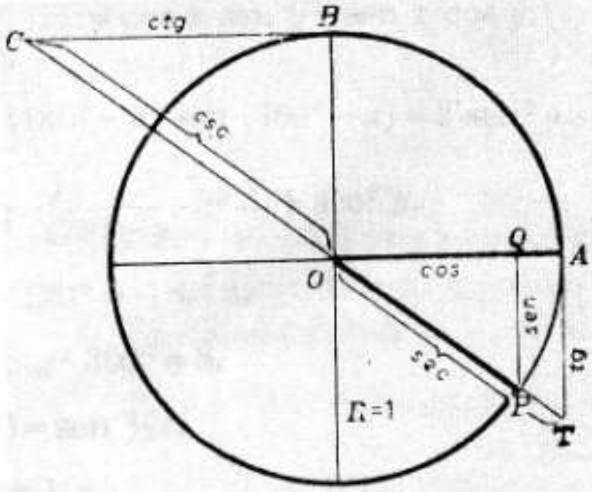


Fig. 44
Angulo en el cuarto cuadrante

algunos fines, sin embargo, es conveniente emplear una representación geométrica de los valores de las funciones por medio de *segmentos de recta dirigidos*, llamados *líneas trigonométricas*.

Un segmento de recta dirigido es aquel en que se toma en cuenta el sentido. Si sus extremos son los puntos A y B, los segmentos dirigidos AB y BA difieren en el signo.

En las figuras 41 - 44 están señaladas las líneas trigonométricas que definen las seis funciones trigonométricas. El círculo es de radio unidad y se llama *círculo trigonométrico*.

En cada figura, las coordenadas del punto P del lado terminal son $x = OQ$, $y = QP$. El radio $r = OP = 1$.

Aplicando las definiciones del Artículo 13, obtenemos

$$\operatorname{sen} AOP = \frac{QP}{OP(=1)} = \boldsymbol{QP};$$

$$\cos AOP = \frac{OQ}{OP(=1)} = \boldsymbol{OQ};$$

$$\operatorname{tg} AOP = \frac{QP}{OQ} = \frac{AT}{OA(=1)}^{*} = \boldsymbol{AT};$$

$$\sec AOP = \frac{OP}{OQ} = \frac{OT}{OA(=1)}^{*} = \boldsymbol{OT};$$

$$\operatorname{ctg} AOP = \frac{OQ}{QP} = \frac{BC}{OB(=1)}^{**} = \boldsymbol{BC};$$

$$\csc AOP = \frac{OP}{QP} = \frac{OC}{OB(=1)}^{**} = \boldsymbol{OC}.$$

Los segmentos QP, OQ, etc. de las igualdades anteriores, que dan los valores de las líneas trigonométricas, están *diri-*

* Ya que los triángulos OQP y OAT son semejantes.

** Ya que los triángulos OQP y OBC son semejantes.

gidos. Los convenios establecidos respecto a cómo hay que considerar el sentido, son los siguientes:

El segmento QP es *positivo* o *negativo* según que el sentido de Q a P sea *hacia arriba* o *hacia abajo*.

Un convenio semejante se aplica a AT.

El segmento OQ es *positivo* o *negativo* según que el sentido de O a Q sea hacia la *derecha* o hacia la *izquierda*.

Un convenio semejante se aplica a BC.

El segmento OT es *positivo* o *negativo* según que los sentidos de O a T y de O a P sean *iguales* u *opuestos*.

Un convenio semejante se aplica a OC.

Las líneas trigonométricas así definidas dan los valores numéricos correctos de las funciones y también sus signos algebraicos.

31. Variación de los valores de las funciones trigonométricas a medida que varía el ángulo. Las líneas trigonométricas dadas en el Artículo anterior son convenientes para discutir la variación de cualquiera de las funciones cuando el ángulo varía.

a. ***Seno y coseno.*** La figura 45 muestra los segmentos que representan los valores del seno y del coseno para ángulos comprendidos entre 0° y 360°. Aparecen en ella claramente los resultados del Artículo 20, a saber,

$$\text{sen } 0^\circ = 0, \ \cos 0^\circ = 1, \ \text{sen } 90^\circ = 1, \ \text{etc.}$$

Fácilmente se pueden comprobar los siguientes enunciados:

Cuando el ángulo x *crece desde* 0° *hasta* 90°,

$$\text{sen } x \text{ crece de } 0 \text{ a } 1,$$

$$\cos x \text{ decrece de } 1 \text{ a } 0.$$

Cuando el ángulo x *crece de* 90° *a* 180°,

$$\text{sen } x \text{ decrece de } 1 \text{ a } 0,$$

$$\cos x \text{ decrece de } 0 \text{ a } -1.$$

Cuando el ángulo x *crece de* 180° *a* 270°,

$$\text{sen } x \text{ decrece de } 0 \text{ a } -1,$$

$$\cos x \text{ crece de } -1 \text{ a } 0.$$

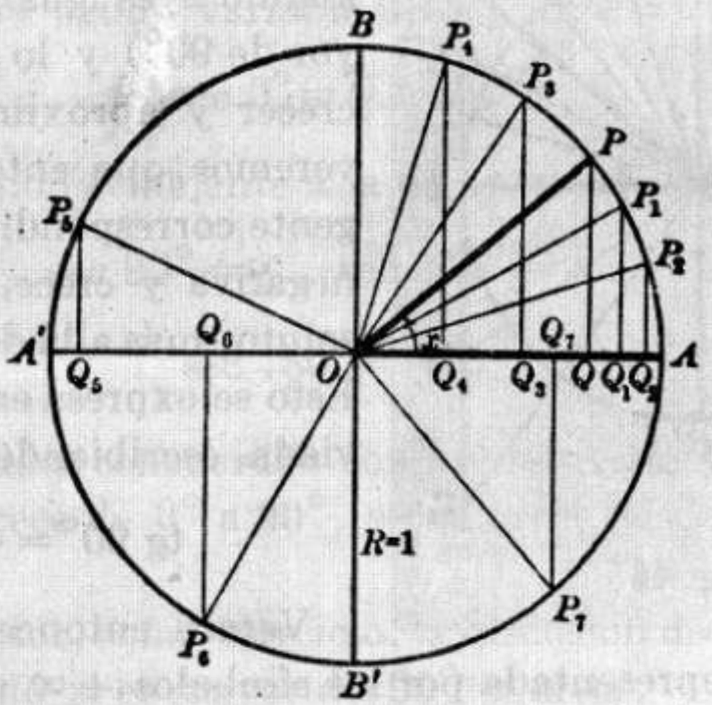


Fig. 45

Cuando el ángulo x *crece de* 270° *a* 360°,

$$\text{sen } x \text{ crece de } -1 \text{ a } 0,$$

$$\cos x \text{ crece de } 0 \text{ a } 1.$$

b. La tangente. Designemos por x el ángulo agudo variable AOT (fig. 46).

A medida que x decrece la tangente decrece, pues va tomando los valores AT_1, AT_2, etc. Luego, como en el Artículo 20, vemos que

$$\text{tg } 0° = 0.$$

A medida que x crece de $0°$ a $90°$, la tangente es positiva y crece a partir de cero según los valores AT_3, AT_4, etc. Al acercarse x a $90°$ el segmento AT crece más allá de todo límite sobrepasando cualquier valor numérico dado. Esto se expresa, en forma abreviada, escribiendo tg $90° = +\infty$.*

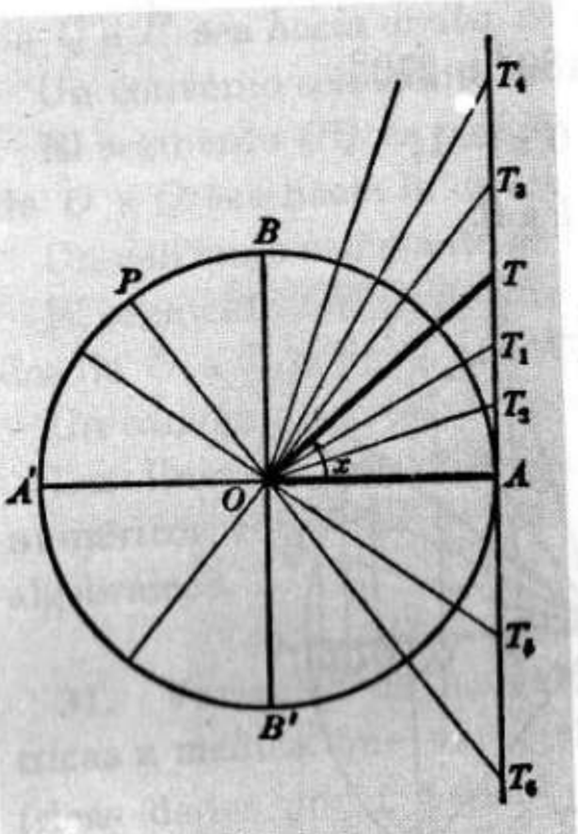


Fig. 46

Si ahora suponemos que el ángulo x es igual a AOP (mayor de $90°$) y lo hacemos decrecer y aproximarse a $90°$, veremos que entonces la tangente correspondiente, AT_6, es negativa y crece, en valor absoluto, más allá de todo límite. Esto se expresa en forma abreviada, escribiendo

$$\text{tg } 90° = -\infty.$$

Vemos entonces que la tangente viene representada por los símbolos $+\infty$ o $-\infty$ según que x vaya creciendo o decreciendo a medida que se aproxima a $90°$. Estos dos últimos resultados se condensan en la igualdad

$$\text{tg } 90° = \infty,$$

cuando, como en este libro, no se hace ninguna distinción sobre la manera en que el ángulo se aproxima a $90°$.

También, de la figura,

$$\text{tg } 180° = 0, \quad \text{tg } 270° = \infty,$$

como vimos en el Artículo 20.

---

* $+\infty$ se lee *más infinito*. $-\infty$ se lee *menos infinito*. ∞ se lee simplemente *infinito*.

Cuando el ángulo x *crece de* 0° a 90°,

$$\text{tg } x \text{ crece desde } 0 \text{ y se hace infinita.}$$

Obsérvese que al aumentar el ángulo x la tg x también aumenta y que la tangente no está definida para $x=90^\circ$ y $x=270^\circ$.

*c. **La secante.*** En la figura anterior, en la cual x representa el ángulo agudo variable AOT, sec $x=OT$. Entonces

$$\sec 0^\circ = OA = 1.$$

Por una discusión semejante a la de tg x, hallamos

$$\sec 90^\circ = \infty, \quad \sec 270^\circ = \infty.$$

También $$\sec 180^\circ = -1.$$

Estos resultados concuerdan con los del Artículo 20.

Cuando x crece de 0° a 90°, sec x crece desde 1 y se hace infinita.

Se deja al lector, como ejercicio, la discusión de la variación de sec x cuando x es mayor de 90° y crece.

*d. **La cotangente.*** Designemos por x el ángulo variable AOC (fig. 47).

A medida que x decrece, la cotangente crece según los valores BC_1, BC_2, etcétera, y a medida que x se aproxima a 0°, la cotangente crece sin límite. Esto se escribe

$$\text{ctg } 0^\circ = \infty.$$

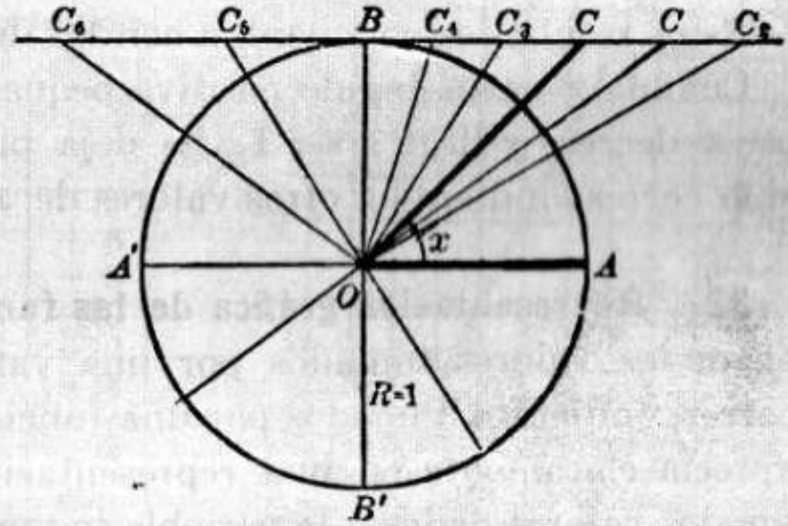


Fig. 47

De la misma manera, hallamos

$$\text{ctg } 180^\circ = \infty .$$

También, como puede verse de la figura,

$$\text{ctg } 90^\circ = 0,$$
$$\text{ctg } 270^\circ = 0.$$

Estos resultados concuerdan con los del Artículo 20.

Obsérvese que cuando x crece, y tiene un valor cualquiera excepto 0° ó 180°, ctg x decrece.

e. La cosecante. Empleando la figura 47, vemos que a medida que x decrece, la cosecante crece según los valores OC_1, OC_2, etc., y a medida que x se aproxima a 0, la cosecante crece sin límite. Esto se escribe

$$\csc 0^\circ = \infty .$$

De la misma manera obtenemos

$$\csc 180^\circ = \infty .$$

También, de la figura,

$$\csc 90^\circ = 1, \quad \csc 270^\circ = -1.$$

Estos resultados concuerdan con los del Artículo 20.

Cuando x es un ángulo positivo pequeño y crece hacia 90°, csc x decrece y llega a ser 1. Se deja para el lector la discusión correspondiente a otros valores de x.

32. Representación gráfica de las funciones. La relación entre los valores tomados por una variable y los valores correspondientes, tomados por una función de esa variable, se aprecia claramente en una representación geométrica en la que los valores dados a la variable se toman como abscisas y los valores correspondientes de la función como ordenadas, de puntos de un plano en el que se ha dibujado un sistema de coordenadas. A la curva trazada por todos estos puntos se le llama *gráfica de la función.*

La construcción de la gráfica se efectúa siguiendo las siguientes

REGLAS GENERALES PARA EL TRAZADO DE LA GRÁFICA DE UNA FUNCIÓN

Primer paso. *Se iguala a* y *la función.*

Segundo paso. *Se dan valores diferentes a la variable* (= x) *y se calculan los valores correspondientes de la función* (= y), *escribiendo los resultados en forma de tabla.*

Tercer paso. *Se trazan los puntos que tengan por abscisas los valores de* x *y por ordenadas los valores correspondientes de* y.

Cuarto paso. *Se construye una curva continua por todos estos puntos en su orden. Esta curva es la gráfica de la función.*

EJEMPLO 1. Construir la gráfica de $2x - 6$.

Solución. Primer paso. Sea $y = 2x - 6$.

Segundo paso. Demos diferentes valores a x y calculemos los valores correspondientes de y.

x	y	x	y
0	−6	0	−6
1	−4	−1	−8
2	−2	−2	−10
3	0	−3	−12
4	2	−4	−14
5	4	−5	−16
6	6	−6	−18
etc.	etc.	etc.	etc.

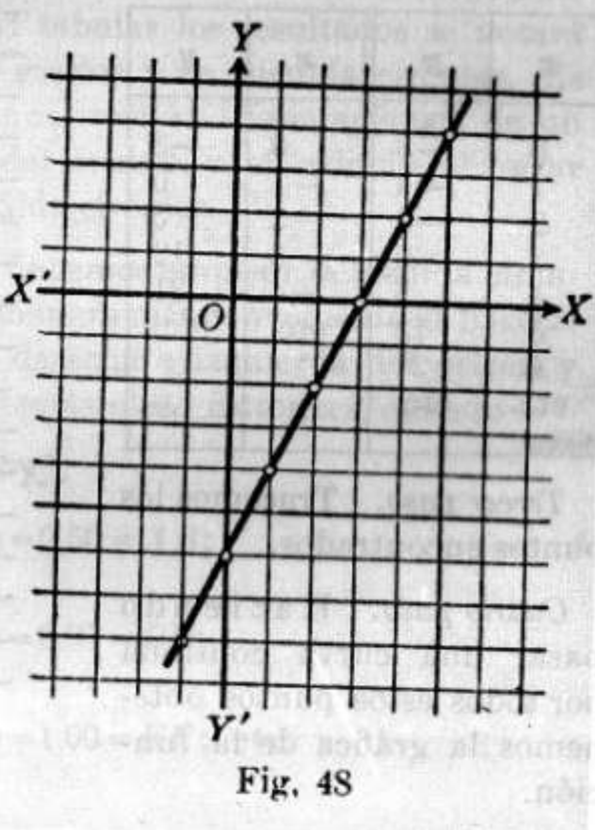


Fig. 48

Así, si $x=0,\ y=-6;\quad x=-1,\ y=-8;$

$x=1,\ y=-4;\quad x=-2,\ y=-10;$

$x=2,\ y=-2;\quad$ etc.

Poniendo estos resultados en forma tabular, las dos primeras columnas dan los valores correspondientes de x e y cuando damos valores positivos a x, y las dos últimas columnas cuando se dan valores negativos a x. Para darle simetría a la tabla se ha puesto $x=0$ en ambos pares de columnas.

Tercer paso. Tracemos los puntos encontrados.

Cuarto paso. Tracemos una curva continua para todos estos puntos y obtengamos así la gráfica de la función, que en este caso es una recta.

EJEMPLO 2. Construir la gráfica de x^2-2x-3.

Solución. Primer paso. Sea $y=x^2-2x-3$.

Segundo paso. Calculando y para los valores dados a x, hallamos la siguiente tabla de valores:

x	y	x	y
0	−3	0	−3
1	−4	−1	0
2	−3	−2	5
3	0	−3	12
4	5	−4	21
5	12	etc.	etc.
6	21		
etc.	etc.		

Tercer paso. Tracemos los puntos encontrados.

Cuarto paso. Haciendo pasar una curva continua por todos estos puntos obtenemos la gráfica de la función.

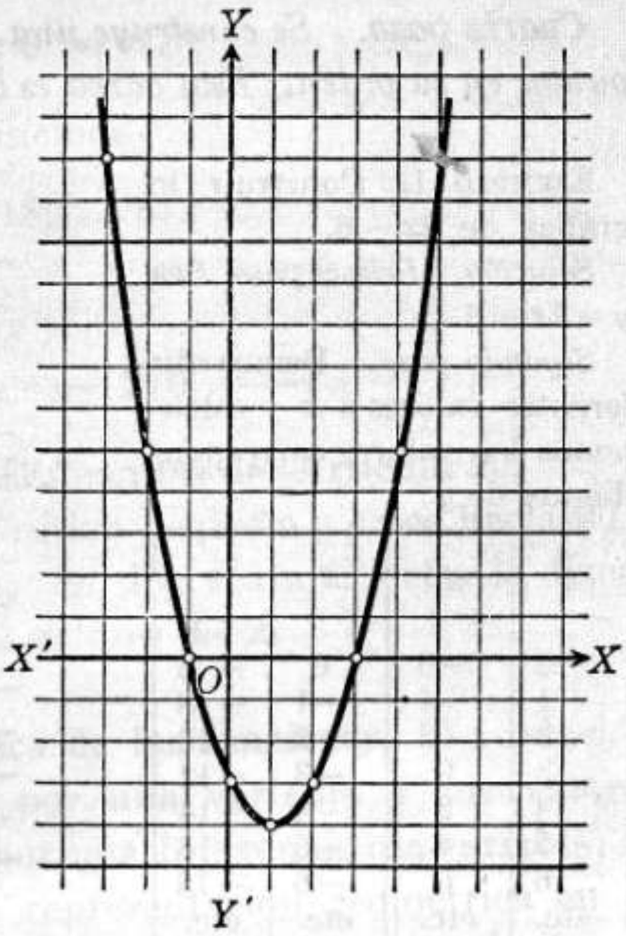


Fig. 49

PROBLEMAS

Construir las gráficas de las siguientes funciones:

1. $x+2$.
2. $6-3x$.
3. x^2.
4. $\frac{1}{x}$.
5. $\frac{4}{x-2}$.
6. 2^x.
7. $2x^2-4$.
8. $8-x^2$.
9. x^3-4x+3.
10. x^3-4x.

33. Gráficas de las funciones trigonométricas. Para hallar la gráfica de una función trigonométrica daremos valores al ángulo; *las medidas circulares* de estos valores se toman como abscisas, y los valores correspondientes de la función se toman como ordenadas de los puntos de la gráfica.

Ejemplo. Trazar la gráfica de sen x.

Solución. Primer paso. Sea $y = \text{sen}\, x$.

Segundo paso. Dando a x valores que difieran en 30°, calculamos los valores correspondientes de y por medio de la tabla del Artículo 7 y lo estudiado en el Artículo 29. Al tabular los resultados se notará que los ángulos están expresados en grados y en medida circular. Es más conveniente, cuando se busca una función trigonométrica de un ángulo, usar la medida en grados del ángulo, y, en cambio, al trazar una gráfica es preferible usar su medida circular.

Tercer paso. Al trázar los puntos debemos emplear la medida circular de los ángulos como abscisa. La manera más conveniente de hacerlo es medir distancias $\pi = 3,1416$ a la derecha e izquierda del origen y dividir cada una de éstas en seis partes iguales. Entonces, cuando

$$x = 0, \qquad y = 0;$$

$$x = \frac{\pi}{6} = 0,52, \qquad y = 0,50 = AB;$$

$$x = \frac{\pi}{3} = 1,05, \qquad y = 0,87 = CD;$$

$$x = \frac{\pi}{2} = 1,57, \qquad y = 1,00 = EF; \text{ etc.}$$

También, cuando

$$x = -\frac{\pi}{6} = -0{,}52, \qquad y = -0{,}50 = GH; \text{ etc.}$$

En la figura 50, tres pequeñas divisiones (sobre cualquier eje) = 1.

x		y	x		y
0°	0	0	0°	0	0
30°	$\frac{\pi}{6}$	0,50	$-30°$	$-\frac{\pi}{6}$	$-0{,}50$
45	$\frac{\pi}{4}$	0,7			
60°	$\frac{\pi}{3}$	0,87	$-60°$	$-\frac{\pi}{3}$	$-0{,}87$
90°	$\frac{\pi}{2}$	1,00	$-90°$	$-\frac{\pi}{2}$	$-1{,}00$
120°	$\frac{2\pi}{3}$	0,87	$-120°$	$-\frac{2\pi}{3}$	$-0{,}87$
$\frac{3\pi}{4}$	0,7	0,7			
150°	$\frac{5\pi}{6}$	0,50	$-150°$	$-\frac{5\pi}{6}$	$-0{,}50$
180°	π	0	$-180°$	$-\pi$	0
210°	$\frac{7\pi}{6}$	$-0{,}50$	$-210°$	$-\frac{7\pi}{6}$	0,50
$\frac{5\pi}{4}$		$-0{,}7$			
240°	$\frac{4\pi}{3}$	$-0{,}87$	$-240°$	$-\frac{4\pi}{3}$	0,87
270°	$\frac{3\pi}{2}$	$-1{,}00$	$-270°$	$-\frac{3\pi}{2}$	1,00
300°	$\frac{5\pi}{3}$	$-0{,}87$	$-300°$	$-\frac{5\pi}{3}$	0,87
$\frac{7\pi}{4}$	$-0{,}7$	$-0{,}7$			
330°	$\frac{11\pi}{6}$	$-0{,}50$	$-330°$	$-\frac{11\pi}{6}$	0,50
360°	2π	0	$-360°$	-2π	0

Cuarto paso. Trazando por estos puntos una curva continua (fig. 50) obtenemos la gráfica de sen x para valores de x comprendidos entre -2π y 2π. Esta curva se llama *curva seno* o *sinusoide*.

DISCUSIÓN. *a*. Como sen $(x \pm 2\pi) = \text{sen } x$, se deduce que

$$y = \text{sen } x = \text{sen } (x \pm 2\pi),$$

es decir, el valor de y *no se altera* si reemplazamos x por $x \pm 2\pi$. Esto significa, que dado un punto cualquiera de la curva se obtienen otros a una distancia 2π a la derecha o a la izquierda. Por tanto, el arco $PNMLO$ se puede trasladar paralelamente a XX', hasta que P coincida con O, y entonces, al coincidir N con F, M con I, etc., $PNMLO$ tomará la posición $OFIJK$, que también será una parte de la curva. En el caso de la sinusoide se necesita, en consecuencia, trazar solamente los puntos, digamos, de $x = -\pi$ a $x = \pi$, lo que da el arco o doble ondulación $MLOFI$. La curva seno consta de un número infinito de tales arcos extendiéndose a derecha e izquierda.

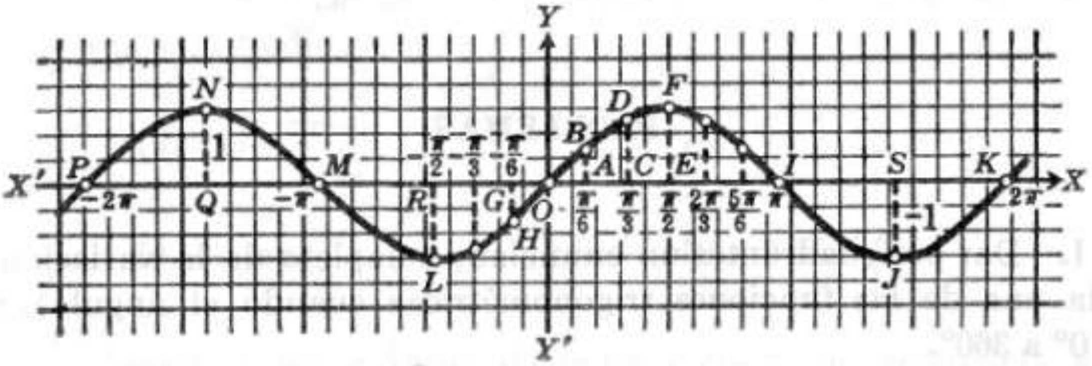


Fig. 50

b. De la gráfica vemos que el valor máximo de y, o sea, de sen x es $1 (= EF = QN$, etc.) y el valor mínimo es -1 $(= SJ = RL$, etc.), mientras x puede tomar un valor cualquiera.

c. Como la gráfica corta al eje de las x un número infinito de veces, resulta que la ecuación

$$\text{sen } x = 0$$

tiene un número infinito de raíces reales, a saber, $x = 0$, $\pm 2\pi$, $\pm 4\pi$, etcétera.

34. Periodicidad de las funciones trigonométricas. Al estudiar la gráfica de sen x hemos visto que a medida que el ángulo crecía de 0 a 2π radianes, el seno crecía primero de 0 a 1, después decrecía de 1 a -1, y, finalmente, crecía de -1 a 0. Cuando el ángulo variaba de 2π radianes a

4π radianes, el seno repetía la misma serie de cambios, y así sucesivamente. Luego, el seno toma otra vez los mismos valores cuando el ángulo varía 2π radianes en su valor. Esto se expresa diciendo que el *período del seno* es de 2π. De manera semejante, el coseno, la secante y la cosecante pasan por todos sus valores mientras el valor del ángulo varía 2π radianes.

La tangente y la cotangente, en cambio, pasan por todos sus valores mientras el valor del ángulo varía π radianes. Por tanto, *el **período** del seno, coseno, secante y cosecante es* 2π ***radianes;*** *mientras que el **período** de la tangente y de la cotangente es de* π ***radianes.***

PROBLEMAS

1. Dar por cuadrantes un enunciado completo de la variación de cada una de las funciones trigonométricas cuando el ángulo crece de 0° a 360°.

2. Dar por cuadrantes un enunciado completo de la variación de la función $4 \cos \theta + 3$ cuando θ crece de 0° a 360°.

3. Partiendo de una figura en la que aparezcan los valores de las líneas trigonométricas de θ y los de las funciones de $180° - \theta$, obtener las fórmulas que expresan las funciones de $180° - \theta$ en función de las funciones trigonométricas de θ.

4. Siguiendo el método del Artículo 33, construir la gráfica de a) $\cos x$; b) $\operatorname{tg} x$.

5. Usando la gráfica de $\operatorname{sen} x$ y la relación $\cos x = \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + x\right)$, dibujar la gráfica de $\cos x$.

6. Usando la gráfica de $\operatorname{sen} x$, construir la gráfica de $\csc x$ a partir de la relación recíproca $\csc x = \frac{1}{\operatorname{sen} x}$.

7. Usando las gráficas de $\cos x$ y de $\operatorname{tg} x$, construir las gráficas de $\sec x$ y de $\operatorname{ctg} x$ a partir de las relaciones recíprocas $\sec x = \frac{1}{\cos x}$, $\operatorname{ctg} x = \frac{1}{\operatorname{tg} x}$.

8. Verificar la relación $\cos\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = -\operatorname{sen} x$ comparando la gráfica de $\cos x$ con la de $\operatorname{sen} x$.

Construir las gráficas de las siguientes funciones y compararlas con la gráfica de $\operatorname{sen} x$:

9. $\frac{1}{2} \operatorname{sen} x$. **10.** $2 \operatorname{sen} x$. **11.** $\operatorname{sen} 2x$. **12.** $\operatorname{sen} 3x$.

Construir las gráficas de las siguientes funciones, para valores de x a intervalos de medio radián:

13. $\cos \frac{\pi x}{2}$. **15.** $\frac{1}{2} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{3}$.

14. $4 \operatorname{sen} \frac{\pi x}{3}$. **16.** $2 \sec \frac{\pi x}{2}$.

17. Construir las gráficas de $\operatorname{sen} x$ y $\cos x$ con referencia a los mismos ejes de coordenadas. Sumando geométricamente las ordenadas correspondientes a las mismas abscisas trácese la gráfica de $\operatorname{sen} x + \cos x$. ¿Es periódica esta función?

35. Gráficas de las funciones trigonométricas trazadas por medio del círculo trigonométrico. El siguiente ejemplo enseñará cómo se puede trazar la gráfica de una función trigonométrica, sin necesidad de usar ninguna tabla de valores numéricos de la función para diferentes ángulos como la dada en el Artículo 7.

Ejemplo 1. Construir la gráfica de $\operatorname{sen} x$.

Solución. Sea $y = \operatorname{sen} x$. Tracemos un círculo trigonométrico. Dividamos la circunferencia en un número cualquiera de partes iguales (12 en este caso). Por los diversos puntos de división bajemos perpendiculares al diámetro horizontal. Entonces, el seno del ángulo AOB, o, lo que equivale a la misma cosa,

$$\text{seno del arco } AB = QB,$$

$$\text{seno del arco } AE = NE,$$

$$\text{seno del arco } AJ = OJ, \text{ etc.}$$

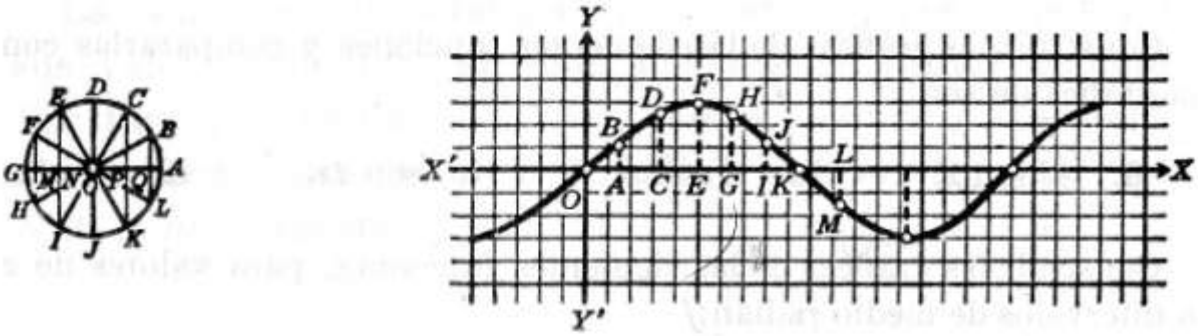


Fig. 51

Es evidente que si trazamos los puntos de un plano que tengan por abscisas las longitudes de los arcos y por ordenadas las longitudes correspondientes de las perpendiculares, estos puntos estarán sobre la gráfica de sen x. Si escogemos la misma escala que en el ejemplo del Artículo 33, las dos gráficas pueden hacerse coincidir. Cuando se escogen escalas diferentes, las formas principales de las dos gráficas de sen x son las mismas y la discusión es la misma para ambas.

	EN EL CÍRCULO	EN LA GRÁFICA	EN EL CÍRCULO	EN LA GRÁFICA
Cuando	$x =$ arc cero	$=$ cero,	$y =$ cero	$=$ cero;
	$x =$ arc AB	$= OA$,	$y = QB$	$= AB$;
	$x =$ arc AC	$= OC$,	$y = PC$	$= CD$;
	$x =$ arc AD	$= OE$,	$y = OD$	$= EF$;
	$x =$ arc AE	$= OG$,	$y = NE$	$= GH$;
	$x =$ arc AF	$= OI$,	$y = MF$	$= IJ$;
	$x =$ arc AG	$= OK$,	$y =$ cero	$=$ cero;
	$x =$ arc AH	$= OL$,	$y = MH$	$= LM$, etc.

EJEMPLO 2. Trazar la gráfica de $\cos x$.

Solución. Sea $y = \cos x$. La *curva coseno* o *cosinusoide* se construye como sigue:

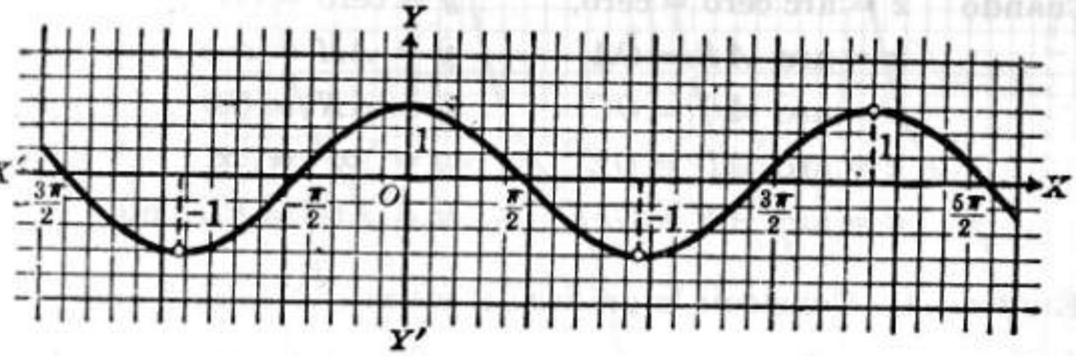


Fig. 52

Utilizando el mismo círculo trigonométrico de la figura 51, se toman los arcos cero, AB, AC, AD, etc., como abscisas y los segmentos OA, OQ, OP, cero, etc., como ordenadas correspondientes, respectivamente. Uniendo los puntos así obtenidos tendremos la curva buscada (fig. 52).

EJEMPLO 3. Construir la gráfica de $\operatorname{tg} x$.

Solución. La *curva tangente* o *tangentoide* es la representada en la figura 53.

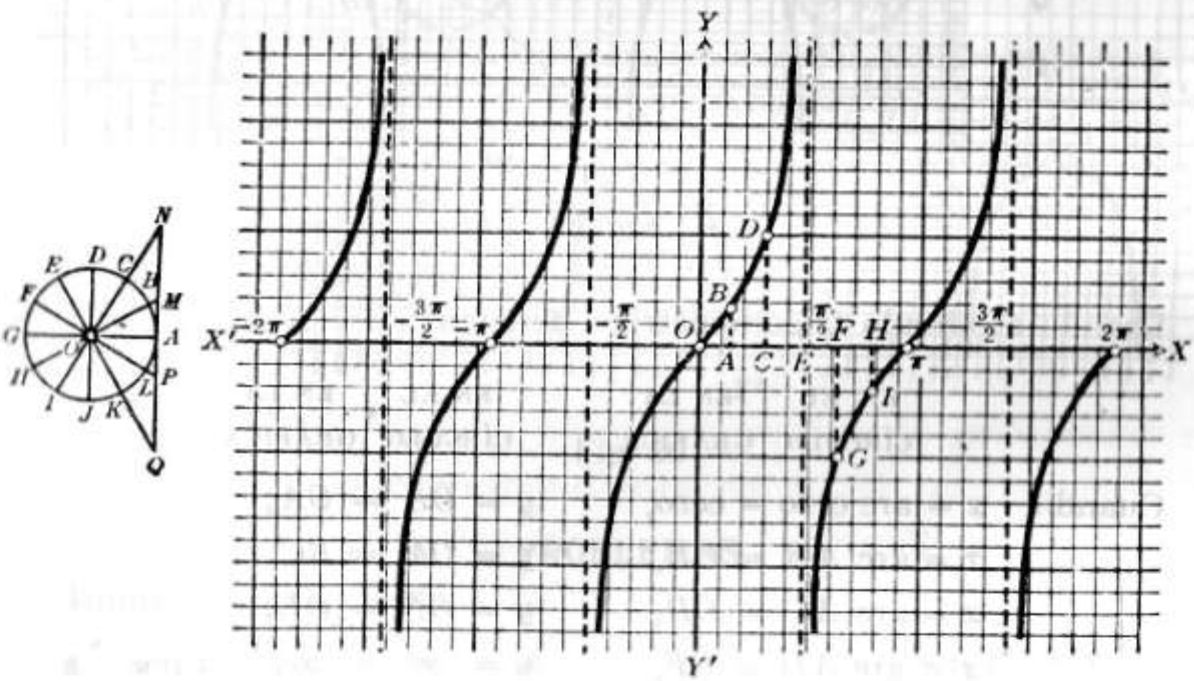


Fig. 53

Para su construcción, partiendo del círculo trigonométrico, tenemos:

	EN EL CÍRCULO		EN LA GRÁFICA	EN EL CÍRCULO		EN LA GRÁFICA
Cuando	$x =$ arc cero	$=$	cero,	$y =$ cero	$=$	cero;
	$x =$ arc AB	$=$	OA,	$y = AM$	$=$	AB;
	$x =$ arc AC	$=$	OC,	$y = AN$	$=$	CD;
	$x =$ arc AD	$=$	OE,	$y = \infty$	$=$	∞;
	$x =$ arc AE	$=$	OF,	$y = AQ$	$=$	FG, etc.

EJEMPLO 4. Construir la gráfica de sec x.

Solución. La *curva secante* o *secantoide* es la representada en la figura 54.

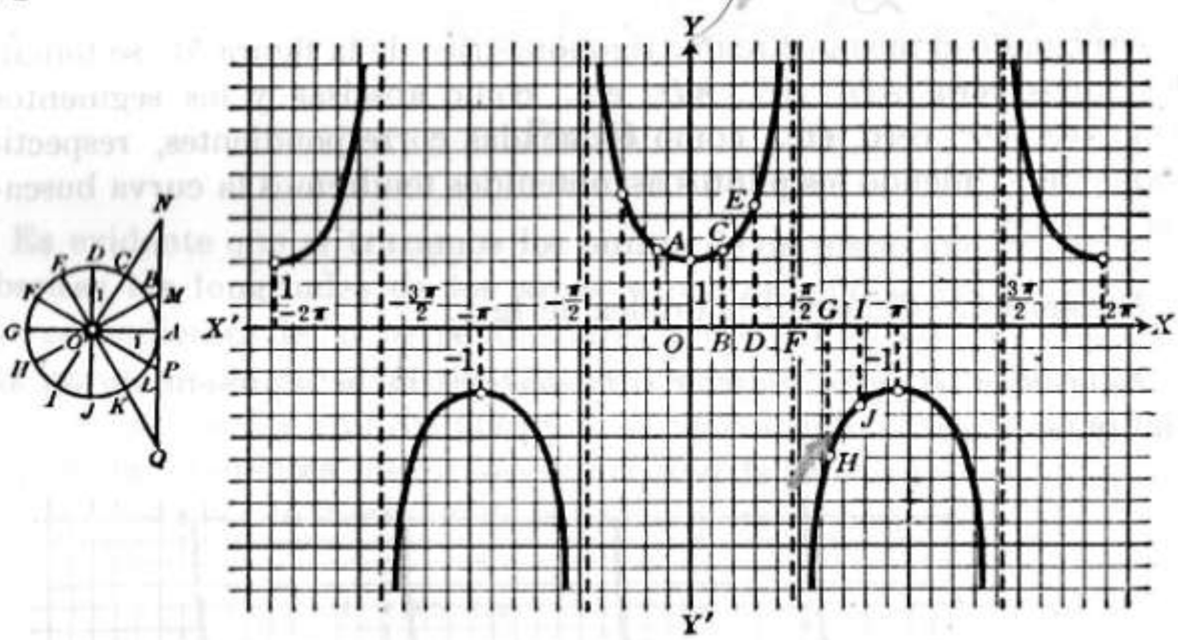


Fig. 54

Usando el círculo trigonométrico, tenemos:

	EN EL CÍRCULO		EN LA GRÁFICA	EN EL CÍRCULO		EN LA GRÁFICA
Cuando	$x =$ arc cero	$=$	cero,	$y = OA$	$=$	OA;
	$x =$ arc AB	$=$	OB,	$y = OM$	$=$	BC;
	$x =$ arc AC	$=$	OD,	$y = ON$	$=$	DE;
	$x =$ arc AD	$=$	OF,	$y = \infty$	$=$	∞;
	$x =$ arc AE	$=$	OG,	$y = OQ$	$=$	GH, etc.

Ejemplo 5. Construir la *curva cotangente* o *cotangentoide.*

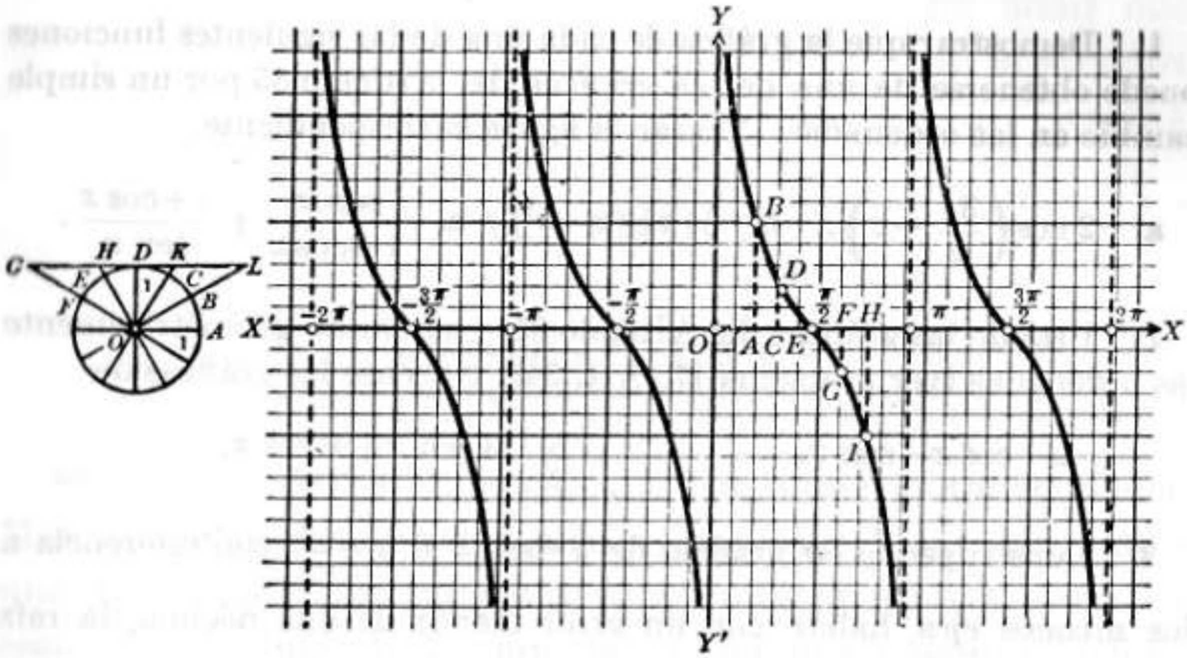


Fig. 55

Ejemplo 6. Construir la *curva cosecante* o *cosecantoide.*

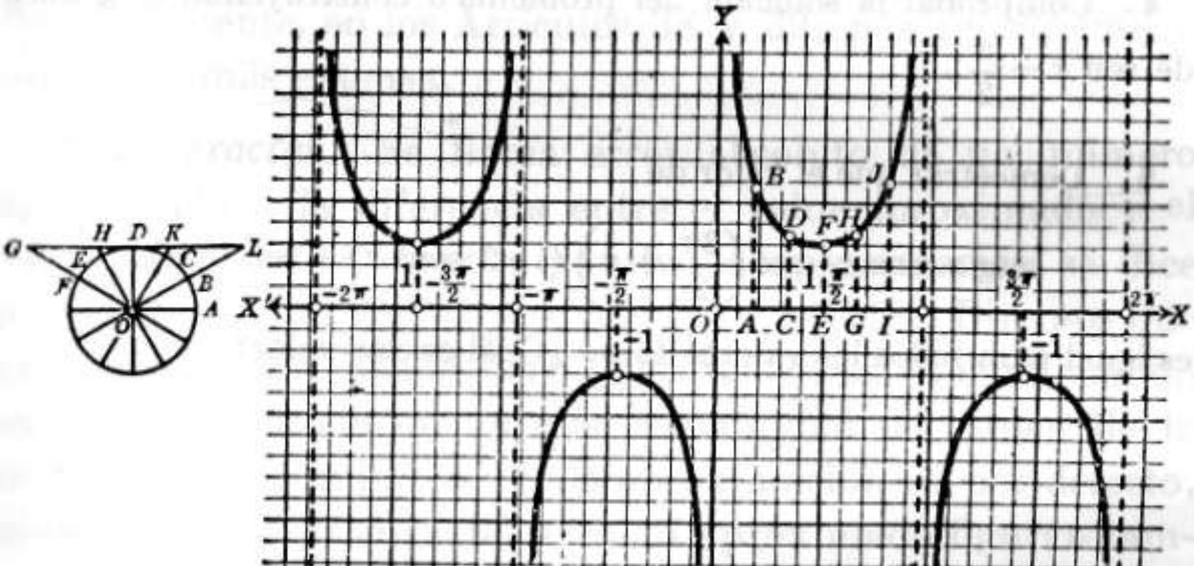


Fig. 56

PROBLEMAS

Dibujar las gráficas de

a. $\operatorname{sen} x + \cos x$.　　c. $\operatorname{sen} 2x$.　　e. $\operatorname{sen} x \cos x$.

b. $\cos x - \operatorname{sen} x$.　　d. $\operatorname{tg} 2x$.

PROBLEMAS ADICIONALES

1. Demostrar que la gráfica de cada una de las siguientes funciones puede obtenerse de una de las gráficas del Artículo 35 por un simple cambio en las ordenadas. Trazar la figura correspondiente.

a. $2\cos\left(\frac{3\pi}{2}-x\right)$. **b.** $\frac{1}{2}\operatorname{tg}(x-\pi)$. **c.** $\frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}+\frac{1+\cos x}{\operatorname{sen} x}$.

2. Usando las gráficas del Artículo 35 y sumando geométricamente las ordenadas (ver problema 17, Art. 34), trácense las gráficas de

a. $\cos x-\operatorname{sen} x$. **b.** $3\operatorname{sen} x+4\cos x$.

3. Construyendo las gráficas de $y=\operatorname{sen} x$ e $y=\frac{x}{2}$ con referencia a los mismos ejes, hallar, con un error menor de una décima, la raíz positiva de la ecuación $\operatorname{sen} x-\frac{x}{2}=0$. ¿Cuántas raíces tiene la ecuación? *Solución.* 1,9.

4. Comprobar la solución del problema 3 construyendo la gráfica de $\operatorname{sen} x-\frac{x}{2}$.

5. Demostrar que el valor de

$$\operatorname{ctg} x\cos x-\sec\left(\frac{3\pi}{2}+x\right)(1-2\operatorname{sen}^2 x)+\operatorname{sen}(-x)$$

es igual para todos los valores de x. ¿Cuál es este valor?

CAPITULO IV

APLICACIONES

36. Objeto del capítulo; cálculos con números aproximados. Muchos problemas en los cuales los datos y las cantidades que se buscan son longitudes, ángulos o ambas cosas, se resuelven fácilmente usando las funciones trigonométricas. En este capítulo se presentan varios de tales problemas. En el Artículo 7 se dió una tabla de valores de las funciones de los ángulos agudos, y de ella se hará uso en el Artículo 37. Posteriormente, en los Artículos 38 y 39, nos referiremos a una tabla más extensa.

Cifras exactas. Se llama error absoluto de un número aproximado a la diferencia entre el valor aproximado y el valor exacto. Si el error es positivo la aproximación se dice por exceso y si es negativo se dice por defecto. Diremos que un número aproximado tiene todas sus cifras exactas cuando su error absoluto es menor que una unidad del orden de la última cifra del número. Si la aproximación es por defecto, todas las cifras exactas del número aproximado figuran también en el número exacto; pero si la aproximación es por exceso la última cifra del número aproximado es superior en una unidad a la correspondiente en el número exacto. Se demuestra en Aritmética que si en la expresión decimal de un número se suprimen todas las cifras que siguen a una de ellas, y se incrementa en una unidad la última cifra conservada cuando la siguiente es mayor ó igual a 5, y se deja invariable cuando sea menor de 5, el número aproximado así obtenido tiene un error absoluto inferior a media unidad del orden de la última cifra conservada, y tiene todas sus cifras exactas.

Los valores dados en la tabla del Artículo 7 tales como

$$\text{sen } 2^\circ = 0{,}0349, \quad \text{tg } 46^\circ = 1{,}0355, \quad \sec 88^\circ = 28{,}654,$$

son aproximados de tal manera que, en cada caso, los errores son menores que media unidad del orden de la última cifra decimal. Es decir, los valores *exactos* están comprendidos:

de sen 2°, entre 0,03485 y 0,03495;
de tg 46°, entre 1,03545 y 1,03555;
de sec 88°, entre 28,6535 y 28,6545.

Al indicar las cifras exactas no se considera la coma decimal, y para números menores que la unidad se omiten los ceros inmediatos a la derecha de la coma. Es por esto que a veces se les llama cifras *significativas* a las cifras exactas. En los ejemplos anteriores las cifras exactas son, respectivamente:

349, 10 355 y 28 654.

En este capítulo, en el que la solución de los problemas se obtiene efectuando las cuatro operaciones aritméticas —adición, sustracción, multiplicación y división— con datos que tienen solamente cuatro cifras exactas, es muy importante recordar que en el resultado *solamente cuatro cifras* serán en general exactas. Para aclarar esto, supongamos que se quiere calcular a de la fórmula

(1) $$a = c \text{ sen } A,$$

a partir de los datos:

$$c = 267, \quad A = 35^\circ.$$

De la tabla del Artículo 7 se obtiene:

$$\text{sen } 35^\circ = 0{,}5736,$$

con cuatro cifras exactas. Por tanto,

(2) $$a = 267 \times 0{,}5736.$$

Efectuando el producto:

$$\begin{array}{r} 0{,}5736 \\ 267 \\ \hline 40152 \\ 34416 \\ 11472 \\ \hline \end{array}$$

(3) $$a = 153{,}1512$$

Este resultado nos da el valor a con 7 cifras, pero solamente cuatro de ellas son exactas. Aplicando lo dicho anteriormente, estas cuatro cifras son:

(4) $$a = 153{,}2,$$

ya que, al suprimir las cifras que siguen a las décimas, hay que incrementar en una unidad la última cifra conservada por ser la primera suprimida igual a 5.

Para ver que las cuatro cifras son exactas observemos que si el número 0,5736 tiene exactas todas sus cifras, quiere decir que el valor exacto de sen 35° está comprendido entre 0,57355 y 0,57365 y, por lo tanto, el valor de a estará comprendido entre

(5) $$0{,}57355 \times 267 = 153{,}13785$$

y $$0{,}57365 \times 267 = 153{,}16455,$$

lo que nos indica que la diferencia entre el valor (4) de a, 153,2, y el valor exacto, es inferior a una décima, ya que $153{,}2 - 153{,}13785 = 0{,}06215$. Esto nos dice que las cuatro cifras de $a = 153{,}2$ son exactas.

Podría suponerse que el valor de $a = 153{,}15$ deducido de (3) tiene también todas sus cifras exactas. Es fácil ver que la cifra 5 no es exacta. En efecto, la diferencia entre el valor exacto de a y el valor 153,15 es, según (5), mayor que 0,01, pues es siempre mayor que 0,01454 que es mayor que 0,01. Por definición, la cifra 5 no es pues exacta.

Cuando se aplican los principios de la Trigonometría a la solución de problemas prácticos —problemas de ingeniería, por ejemplo—, se trabaja con datos que, generalmente, se han obtenido experimentalmente y que, por lo tanto, están sujetos a error. Al tomar estas medidas se debe tener cuidado que estén hechas con el mismo grado de aproximación. Así, sería evidentemente inútil medir un lado de un triángulo con mucho mayor cuidado que otro, porque al combinar estas medidas en un cálculo, el resultado tendría, cuando más, una aproximación igual a la del lado medido con menos cuidado. Análogamente, los ángulos de un triángulo deben medirse con el mismo cuidado que los lados.

Se supone que el número de cifras exactas indica el grado de aproximación que se tuvo al hacer la medida, y que dos medidas cualesquiera que tengan el mismo número de cifras exactas tendrán, en general, el mismo grado relativo de aproximación. Si los lados de un rectángulo, por ejemplo, son aproximadamente de 936 metros y 8 metros, el lado más corto debería ser medido, por lo menos, con dos decimales de aproximación, pues un error de 4 décimas, por ejemplo, en la medida del lado más corto, alterará el área en 374 metros cuadrados.

Las siguientes normas nos ayudarán a efectuar medidas convenientemente y a evitar trabajo innecesario en nuestros cálculos.

1. Se debe procurar que, por lo general, todos los segmentos medidos y las longitudes calculadas tengan el mismo número de cifras exactas.

2. Cuando al medir o calcular una longitud se obtiene solamente una cifra exacta, basta leer los ángulos con 5° de aproximación.

3. Cuando las longitudes se obtienen con dos cifras exactas, los ángulos deben medirse con una aproximación de medio grado.

4. Cuando las longitudes se obtienen con dos cifras exactas, los ángulos deben medirse con una aproximación de $5'$.

5. Cuando los longitudes se obtienen con cuatro cifras exactas, los ángulos deben medirse con una aproximación de $1'$.

37. Problemas relativos a triángulos rectángulos. La solución de un problema dado dependerá frecuentemente de "resolver un triángulo". Un triángulo está compuesto de seis elementos, tres lados y tres ángulos. Resolver un triángulo es encontrar los elementos que no se conocen. Un triángulo puede resolverse si se conocen tres de sus elementos, de los cuales uno por lo menos debe ser un lado.* En un triángulo rectángulo se conoce siempre un ángulo, el ángulo recto; por tanto, un triángulo rectángulo puede resolverse si se conocen dos lados, o un lado y un ángulo agudo. Como una de las aplicaciones más importantes de la Trigonometría** es la resolución de triángulos, vamos a empezar con la *resolución de triángulos rectángulos.*

---

* Se supone que las condiciones dadas son compatibles, es decir, que es posible la construcción del triángulo con los elementos dados.

** El nombre *Trigonometría* se deriva de dos palabras griegas que significan "medida" y "triángulo".

REGLAS GENERALES PARA LA RESOLUCIÓN DE TRIÁNGULOS RECTÁNGULOS

Primer paso. *Se construye una figura que represente lo más posible al triángulo en cuestión.*

Segundo paso. *Cuando se conoce un ángulo agudo, se resta de* 90° *para obtener el otro ángulo agudo.*

Tercer paso. *Para hallar un elemento desconocido, se escoge de* (1) *a* (6) *(Art. 4) una fórmula que contenga a dicho elemento y a otros dos conocidos, y se despeja de ella el elemento que se busca.*

Cuarto paso. *Se comprueban los valores hallados observando si satisfacen relaciones diferentes de las empleadas en el tercer paso. Una comprobación numérica apropiada es la relación*

$$a^2 = c^2 - b^2 = (c+b)(c-b).$$

Los errores grandes se pueden localizar rectificando medidas.

La aplicación de las normas que acabamos de dar puede verse en los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1. **Resolver un triángulo rectángulo dados $A = 35^\circ$, $c = 267$. Hallar también su área.**

Solución. *Primer paso.* **Dibujemos una figura indicando los elementos conocidos y las incógnitas (figura 57).**

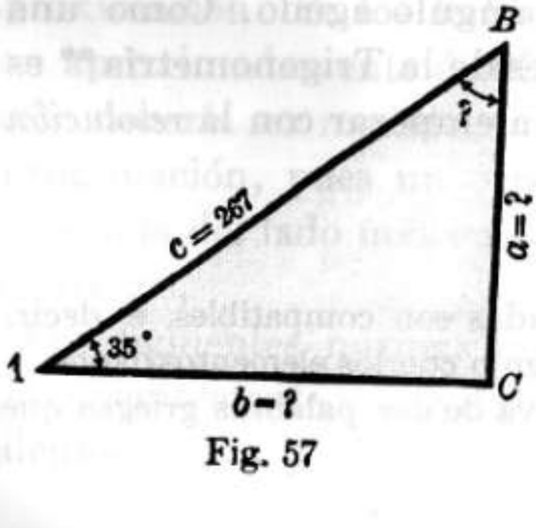


Fig. 57

Segundo paso.

$$B = 90^\circ - A = 90^\circ - 35^\circ = 55^\circ.$$

Tercer paso. **Para hallar a, usemos la fórmula (1) (Art. 4)**

$$\operatorname{sen} A = \frac{a}{c}.$$

Sustituyendo el valor de sen A = sen $35° = 0,5736$ (hallado en la tabla) y $c = 267$, tenemos

$$0,5736 = \frac{a}{267}.$$

Por tanto, $a = 267 \times 0,5736 = 153,2$.

Para hallar b, usemos la fórmula (2) (Art. 4);

$$\cos A = \frac{b}{c}.$$

Sustituyendo como anteriormente, tenemos

$$0,8192 = \frac{b}{267},$$

ya que según la tabla $\cos A = \cos 35° = 0,8192$. Despejando b, tendremos

$$b = 0,8192 \times 267 = 218,7.$$

Cuarto paso. Midiendo los lados podemos comprobar los resultados para ver que no haya errores grandes. Como una comprobación numérica hallamos que los valores de a, b, c satisfacen la condición

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

Para hallar el área del triángulo, tenemos

$$\text{área} = \frac{ab}{2} = \frac{153,2 \times 218,7}{2} = 16750.$$

EJEMPLO 2. Una escalera de 30 decímetros de largo está apoyada sobre la pared de un edificio (figura 58), estando su base a 15 dm del edificio. ¿Qué ángulo forma la escalera con el piso?

Solución. Nuestra figura muestra un triángulo rectángulo del que se conocen la hipotenusa y el lado adyacente al ángulo buscado ($= x$). Por tanto,

$$\cos x = {}^{15}\!/_{30} = {}^{1}\!/_{2}.$$

Por el Artículo 5, $x = 60°$.

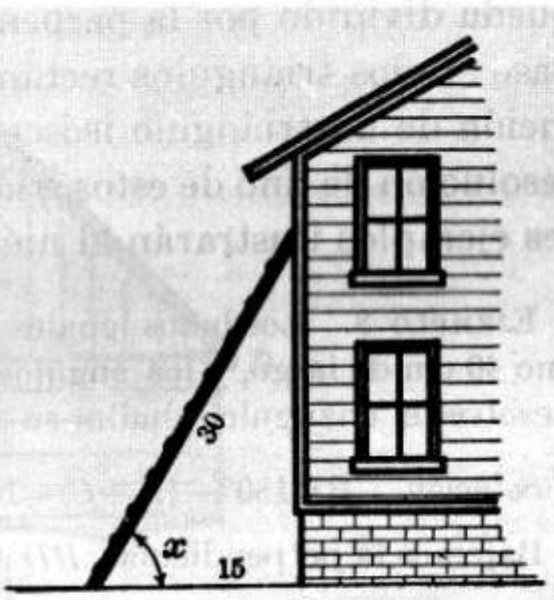


Fig. 58

Ahora deduciremos tres fórmulas por medio de las cuales se puede simplificar la resolución de triángulos rectángulos. De **(1)**, **(2)**, **(3)** (Art. 4), se deduce:

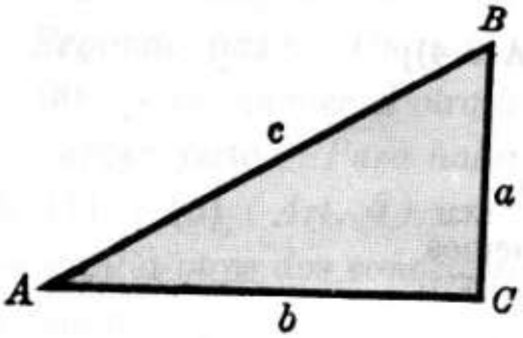


Fig. 59

De $\operatorname{sen} A = \frac{a}{c}$,

resulta $a = c \operatorname{sen} A$.

De $\cos A = \frac{b}{c}$,

resulta $b = c \cos A$.

De $\operatorname{tg} A = \frac{a}{b}$,

resulta $a = b \operatorname{tg} A$.

Estos resultados conducen a las importantes reglas siguientes que son de gran aplicación:

(38) Un cateto = hipotenusa × seno del ángulo opuesto.

(39) Un cateto = hipotenusa × coseno del ángulo comprendido.

(40) Un cateto = otro cateto × tangente del ángulo opuesto al primero.

Resolución de triángulos isósceles. Un triángulo isósceles queda dividido por la perpendicular bajada de su vértice a la base en dos triángulos rectángulos iguales; por tanto, la resolución de un triángulo isósceles puede hacerse depender de la resolución de uno de estos triángulos rectángulos. Los siguientes ejemplos ilustrarán el método:

EJEMPLO 3. Los lados iguales de un triángulo isósceles tienen cada uno 40 cm de largo, y los ángulos en la base son cada uno igual a 25°. Resolver el triángulo y hallar su área.

Solución. $B = 180° - (A + C) = 180° - 50° = 130°$.

Bajemos la perpendicular BD a AC.

$$AD = AB \cos A = 40 \cos 25° = 40 \times 0,9063 = 36,25. \quad \text{Por } \mathbf{(39)}$$

Por lo tanto, $AC = 2AD = 72,50$ cm.

Para hallar el área necesitamos además la altura BD.

$$BD = AB \text{ sen } A = 40 \text{ sen } 25° \qquad \text{Por } (\mathbf{38})$$

$$= 40 \times 0,4226 = 16,90.$$

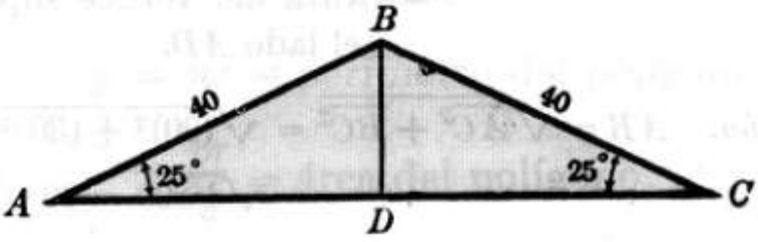


Fig. 60

Comprobación. $BD = AD \text{ tg } 25° = 36,25 \times 0,4663 = 16,9.$ Por (**40**)

Finalmente, área $= \frac{1}{2}\, AC \times BD = 612,6$ cm².

Ejemplo 4. Un establo de 60 decímetros de ancho tiene un techo cuya forma aparece en la figura 61 y cuyas alas tienen una longitud de $30\sqrt{2}$ decímetros. ¿Cuál es la inclinación de las alas del techo con respecto a la horizontal, y a qué distancia está el vértice superior B de la recta AD (fig. 61)?

Solución. Bajemos una perpendicular de B a AD. Entonces

$$\cos x = \frac{AC}{AB} = \frac{30}{30\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

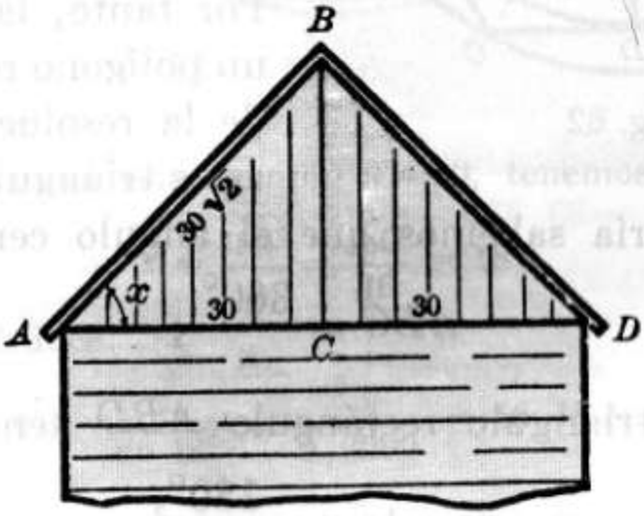


Fig. 61

Por tanto, $x = 45° =$ inclinación de las alas del techo.

También, $BC = AB \text{ sen } x$ Por (38)

$$= 30\sqrt{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$= 30 \text{ dm}$$

= Altura del vértice superior B sobre el lado AD.

Comprobación. $AB = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2} = \sqrt{(30)^2 + (30)^2}$

$$= \sqrt{1\,800} = 30\sqrt{2}.$$

Resolución de polígonos regulares. Las rectas trazadas desde el centro de un polígono regular de n lados (fig. 62) a los vértices, son radios del círculo circunscrito y dividen al polígono en n triángulos isósceles iguales. Las perpendiculares trazadas del centro a los lados del polígono se llaman *apotemas* del polígono y son radios del círculo inscrito, las cuales dividen a estos n triángulos isósceles iguales en $2n$ triángulos rectángulos iguales. Por tanto, la resolución de un polígono regular depende de la resolución de uno de estos triángulos rectángulos.

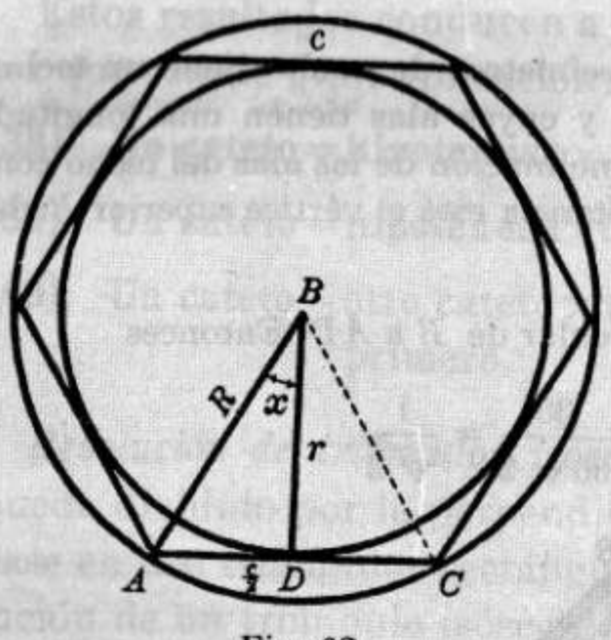


Fig. 62

Por Geometría sabemos que el ángulo central

$$ABC = \frac{360°}{n};$$

luego, en el triángulo rectángulo ABD tendremos:

$$\text{ángulo } x = \frac{180°}{n}.$$

También, $AD = \frac{c}{2}$ = la mitad de la longitud de un lado,

$AB = R$ = radio del círculo circunscrito,

$BD = r$ = apotema o radio del círculo inscrito,

$p = nc$ = perímetro del polígono,

$\frac{pr}{2}$ = área del polígono.

Ejemplo 5. **El lado de un decágono regular (fig. 63) es igual a 10 cm; hallar los radios de los círculos inscrito y circunscrito y el área del polígono.**

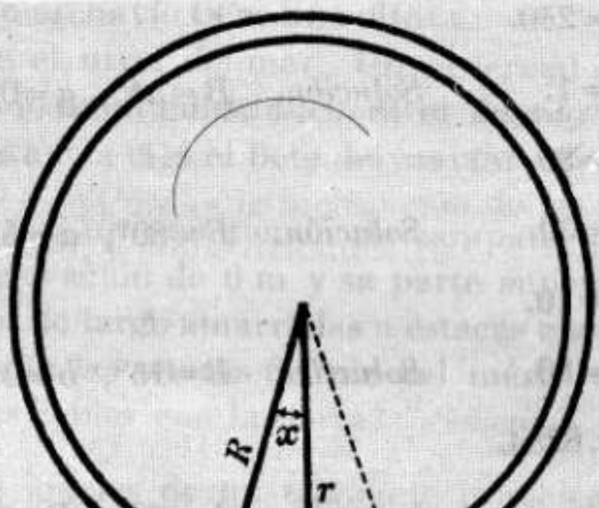


Fig. 63

Solución. Como en este ejemplo $n = 10$, tenemos

$$x = \frac{180°}{n} = \frac{180°}{10} = 18°.$$

De la figura se deduce:

$$R = \frac{5}{\operatorname{sen} 18°} = \frac{5}{0,3090} = 16,18 \text{ cm},$$

y
$$r = \frac{5}{\operatorname{tg} 18°} = \frac{5}{0,3249} = 15,39 \text{ cm}.$$

Comprobación. $r = R \cos 18^\circ = 16,18 \times 0,9511$
$$= 15,39.$$

También, $p = 10 \times 10 = 100$ cm

$= \text{perímetro del polígono;}$

por tanto, $\text{área} = \dfrac{pr}{2} = \dfrac{100 \times 15,39}{2} = 769,5 \text{ cm}^2.$

PROBLEMAS

Resolver los siguientes triángulos rectángulos ($C = 90^\circ$), dados:

1. $A = 20^\circ$, $c = 80$. *Solución.* $B = 70^\circ$, $a = 27,36$, $b = 75,18$.

2. $B = 51^\circ$, $c = 250$.

3. $A = 36^\circ$, $c = 1$. *Solución.* $B = 54^\circ$, $a = 0,5878$, $b = 0,8090$.

4. $A = 25^\circ$, $a = 30$.

5. $A = 10^\circ$, $b = 30$. *Solución.* $B = 80^\circ$, $a = 5,289$, $c = 30,46$.

6. $B = 55^\circ$, $b = 10$.

7. $A = 75^\circ$, $a = 80$. *Solución.* $B = 15^\circ$, $b = 21,43$, $c = 82,82$.

8. $a = 2$, $c = 2,8284$.

9. $c = 43$, $a = 38,31$. *Solución.* $A = 63^\circ$, $B = 27^\circ$, $b = 19,52$.

10. $a = 36,4$, $b = 100$.

11. $a = 23,32$, $b = 50$. *Solución.* $A = 25^\circ$, $B = 65^\circ$, $c = 55,18$.

12. $b = 9,696$, $c = 20$.

13. $a = 30,21$, $c = 33,33$. *Solución.* $A = 65^\circ$, $B = 25^\circ$, $b = 14,09$.

14. $a = 13,40$, $b = 50$.

15. Un árbol ha sido roto por el viento de tal manera que sus dos partes forman con la tierra un triángulo rectángulo. La parte superior forma un ángulo de 35° con el piso, y la distancia, medida sobre el piso, desde el tronco hasta la cúspide caída del árbol es de 5 metros. Hallar la altura que tenía el árbol. *Solución.* 9,605 m.

16. Para calcular el ancho de un río, se midió una distancia, AB (figura 64), a lo largo de su orilla, tomándose el punto A directamente opuesto a un árbol, C, sobre el otro lado. Si se observó que el ángulo ABC era de 55° y la distancia AB de 10 metros, hállese el ancho del río.

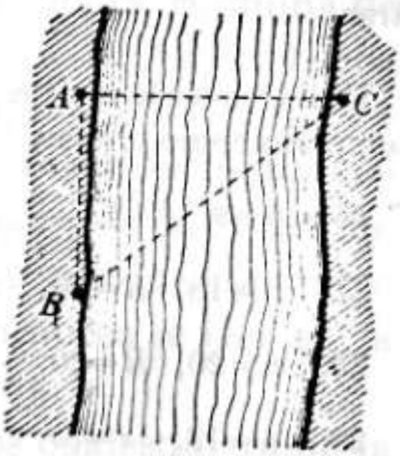


Fig. 64

17. Dos fortalezas de observación de un puerto están separadas una distancia de dos millas y exactamente sobre la dirección Este Oeste. Desde una de ellas se observa un acorazado exactamente en la dirección Sur y desde la otra se observa a 15° hacia el Este del Sur. ¿A qué distancia está el acorazado de la fortaleza más cercana?

Solución. 7,464 millas.

18. Un mástil de un navío tiene una altura de 30 metros sobre el nivel del mar. Un observador colocado en un bote ve el mástil bajo un ángulo de 5°. Si el ángulo está en un plano vertical, ¿a qué distancia está el bote del navío?

19. El palo central de una tienda de campaña de forma de cono circular tiene una elevación de 6 m y su parte superior está sostenida por cuerdas de 12 m de largo amarradas a estacas clavadas en la tierra. ¿A qué distancia están las estacas del pie del mástil central? ¿Cuál es la inclinación de los cables con la tierra? *Solución.* 10,39 m; 30°.

20. Los ángulos iguales de un triángulo isósceles son de 35°, y la base es de 393,18 cm. Hallar los otros elementos del triángulo.

21. La base de un triángulo isósceles mide 300 cm y su altura 150 cm. Resolver el triángulo.

Solución. Angulo en el vértice = 90°, ángulos iguales = 45°, lados iguales = 212,13 cm.

22. La base de un triángulo isósceles mide 24 cm y el ángulo en el vértice es de 48°; hallar los otros elementos y el área.

23. La base de un triángulo isósceles mide 100 m, y su altura es de 35,01 m. Resolver el triángulo. *Solución.* 61,04 m; 35°, 110°.

24. El terreno ocupado por un granero es de 24 m por 12 m, y la inclinación de las alas del techo es de 45°. Hallar la longitud de las vigas y el área del techo completo, siendo la proyección horizontal de la cornisa de 30 cm.

25. El lado de un pentágono regular es de 24 cm; hallar R, r y el área. *Solución.* 20,42 cm, 16,52 cm, 991,2 cm².

Hallar los elementos que faltan y el área de un polígono regular, teniendo como datos:

26. $n=9$, $c=12$.

27. $n=18$, $R=10$. *Solución.* $r=9,848$, $c=3,472$, área $=307,7$.

28. $n=20$, $R=20$.

29. $n=12$, $r=8$. *Solución.* $R=8,28$, $c=4,29$, área $=206$.

30. El lado de un pentágono regular es de 21,78 cm. Hallar la longitud de una de sus diagonales.

31. El lado de un hexágono regular es de 24 cm. Hallar los radios de los círculos inscrito y circunscrito, la diferencia entre las áreas del hexágono y el círculo inscrito y la diferencia entre las áreas del hexágono y el círculo circunscrito.

Solución. $R=24$ cm, $r=20,8$ cm; 139,1 cm², 311 cm².

32. Si c es el lado de un polígono regular de n lados, demuéstrese que

$$R=\frac{1}{2}\,c\csc\frac{180^\circ}{n} \quad \text{y} \quad r=\frac{1}{2}\,c\operatorname{ctg}\frac{180^\circ}{n}.$$

33. Si r es el radio de un círculo, demostrar que el lado del polígono regular inscrito de n lados es $2r\operatorname{sen}\dfrac{180^\circ}{n}$, y que el lado del polígono regular circunscrito es $2r\operatorname{tg}\dfrac{180^\circ}{n}$.

38. Tabla de valores del seno y del coseno; interpolación. La tabla IV,* da los valores naturales de las funciones seno y coseno de los ángulos comprendidos entre 0° y 90°

---

* Las tablas a las que se hace referencia son las que van al final del libro.

a intervalos de 10′. Estos valores tienen una aproximación de una diezmilésima. Una simple ojeada a la tabla revelará fácilmente la manera en que estos valores están tabulados. Para el seno, los grados aparecen en la primera columna de la izquierda de cada página y la graduación crece de arriba hacia abajo. Las decenas de minutos que exceden de un número dado de grados se leen en las filas de arriba de izquierda a derecha. Para el coseno, los grados aparecen en la última columna de la derecha de cada página y la graduación crece de abajo hacia arriba. Las decenas de minutos se leen en la primera fila de abajo de derecha a izquierda.

La diferencia entre dos valores sucesivos cualesquiera de la tabla se llama **diferencia tabular.**

Esta tabla y la tabla V se usan de dos maneras: 1) dado un ángulo, hallar el valor correspondiente de una función de este ángulo, y 2) dado el valor de una función, hallar el ángulo correspondiente.

Los siguientes ejemplos enseñan el uso de la tabla.

EJEMPLO 1. Hallar sen 28° 40′. En la tabla IV, en la columna encabezada con **Ang.**, **grados**, buscamos 28°. Siguiendo la fila correspondiente a este número vamos hacia la derecha hasta la columna encabezada con 40′; donde cruzan fila y columna hallamos el número 0,4797.

Por tanto, $$\text{sen } 28° 40' = 0,4797.$$

EJEMPLO 2. Hallar cos 77° 10′. En la tabla IV, en la columna de los grados de la derecha, leyendo hacia arriba, hallamos 77°. Avanzando hacia la izquierda, hasta la columna en que aparece 10′ en su parte *inferior*, hallamos el número 0,2221. Por tanto,

$$\cos 77° 10' = 0,2221.$$

En caso de que el ángulo dado sea tal que el valor correspondiente de una función no esté tabulado, se hace necesario hallar este valor por un proceso separado. Este proceso se llama **interpolación.** Los siguientes ejemplos enseñan como se efectúa la interpolación:

EJEMPLO 3. Hallar sen $62° 46'$. En la tabla IV encontramos

$$\text{sen } 62° 50' = 0,8897$$

y
$$\text{sen } 62° 40' = 0,8884.$$

Vemos que un incremento de $10'$ en el ángulo produce un incremento de $0,0013$ en el seno. Si suponemos que el incremento en el seno es proporcional al incremento en el ángulo, el incremento en el seno correspondiente a un incremento de $6'$ en el ángulo es

$$0,6 \times 0,0013 = 0,00078.$$

Este número es después "redondeado" a la aproximación que da nuestra tabla, es decir, a cuatro cifras decimales. Así, el incremento $0,00078$ se escribe $0,0008$. Por tanto,

$$\text{sen } 62° 46' = 0,8884 + 0,0008 = 0,8892.$$

Debemos hacer observar, sin embargo, que el incremento en el seno de un ángulo no es exactamente proporcional al incremento en el ángulo. Pero cuando la variación en el ángulo es muy pequeña, la interpolación así efectuada da un valor suficientemente aproximado.

EJEMPLO 4. Hallar cos $57° 23'$. De la tabla IV tenemos

$$\cos 57° 30' = 0,5373$$

$$\cos 57° 20' = 0,5398$$

$$\overline{10' \quad 0,0025}$$

La interpolación se hace como en el ejemplo anterior. Pero como el coseno decrece a medida que el ángulo crece, debemos *restar* la parte proporcional. Ahora $0,3 \times 0,0025 = 0,00075$. Expresando el resultado en cuatro cifras decimales, podemos escribir con la misma aproximación $0,0007$ ó $0,0008$. En cálculos largos tomamos el dígito inmediato superior al número que precede a un 5 colocado en el quinto lugar solamente si éste es impar. De esta manera los errores tienden a balancearse unos con otros. Por tanto,

$$\cos 57° 23' = 0,5398 - 0,0008 = 0,5390.$$

PROBLEMAS

Hallar los valores de las siguientes funciones:

1. sen 43° 18′.	*Solución.* 0,6858.	**2.** cos 23° 16′.
3. cos 79° 54′.	*Solución.* 0,1753.	**4.** sen 65° 36′.
5. sen 8° 2′.	*Solución.* 0,1398.	**6.** cos 45° 45′.

Los ejemplos que siguen enseñan el procedimiento seguido para encontrar un ángulo correspondiente a una función dada:

Ejemplo 5. Dado sen $A = 0,8150$, hallar A.

En la tabla IV hallamos que 0,8150 está entre 0,8141 y 0,8158. Y

$$\begin{array}{r} \text{sen } 54^\circ\,40' = 0,8158 \\ \text{sen } 54^\circ\,30' = 0,8141 \\ \hline 10' \quad 0,0017 \end{array}$$

Un incremento de 0,0017 en el seno produce un incremento de 10′ en el ángulo. Un incremento de $0,8150-0,8141=0,0009$ en el seno producirá un incremento de $\frac{9}{17}$ de $10'=5,3'$. Pero una tabla de cuatro decimales da solamente la aproximación correspondiente en el ángulo hasta un minuto. Por tanto,

$$A = 54^\circ\,30'+5'=54^\circ\,35'.$$

Ejemplo 6. Dado cos $A = 0,3362$, hallar A.

En la tabla IV, hallamos

$$\begin{array}{r} \cos 70^\circ\,30' = 0,3338 \\ \cos 70^\circ\,20' = 0,3365 \\ \hline 10' \quad 0,0027 \end{array}$$

Una disminución de 0,0027 en el coseno produce un incremento de 10′ en el ángulo. Por tanto, la parte proporcional $\frac{3}{27}$ de 10′, o sea, 1′ es sumado al ángulo más pequeño, y se obtiene

$$A = 70^\circ\,21'.$$

PROBLEMAS

Hallar el valor de A, en el primer cuadrante, correspondiente a cada una de las siguientes funciones:

1. sen $A = 0,3365$. *Solución.* $19° 40'$. **2.** sen $A = 0,5032$.

3. cos $A = 0,8613$. *Solución.* $30° 32'$. **4.** cos $A = 0,3372$.

5. sen $A = 0,9956$. *Solución.* $84° 37'$. **6.** cos $A = 0,1630$.

39. Tabla de valores de la tangente y la cotangente. La tabla V da los valores de las funciones naturales tangente y cotangente de los ángulos comprendidos entre 0° y 90° a intervalos de 10′. La disposición de esta tabla es la misma que la de la tabla IV. La interpolación se efectúa de la misma manera que para el seno y el coseno.

Ejemplo. Hallar ctg 34° 48′. De la tabla V tenemos

$$\text{ctg } 34° 50' = 1,437$$
$$\text{ctg } 34° 40' = 1,446$$
$$\overline{\quad 10' \quad 0,009}$$

Una disminución de 0,009 en la cotangente da lugar a un incremento de 10′ en el ángulo. La parte proporcional $0,8 \times 0,009 = 0,007$, se resta. Es decir,

$$\text{ctg } 34° 48' = 1,446 - 0,007 = 1,439.$$

La interpolación no debe hacerse por la tangente de un ángulo comprendido entre 82° y 90°, ni para la cotangente de un ángulo comprendido entre 0° y 7°.

PROBLEMAS

Hallar el valor de cada una de las siguientes funciones:

1. tg 15° 24′. *Solución.* 0,2754. **2.** ctg 35° 18′.

3. tg 80° 12′. *Solución.* 5,789. **4.** sen 75° 16′.

5. ctg 55° 43′. *Solución.* 0,6817. **6.** cos 25° 47′.

7. ctg 169° 19′. *Solución.* −5,301. **8.** sen 217° 17′.

9. tg 333° 33′. *Solución.* −0,4975. **10.** cos (−46° 25′).

11. tg 163° 42′. *Solución.* −0,2925. **12.** ctg (−273° 55′).

Hallar el valor de A, en el primer cuadrante, correspondiente a cada una de las siguientes funciones:

13. tg $A = 0,7673$. *Solución.* 37° 30′. **14.** ctg $A = 0,4452$.

15. ctg $A = 0,5730$. *Solución.* 60° 11′. **16.** tg $A = 2,666$.

17. sen $A = 0,9678$. *Solución.* 75° 26′. **18.** cos $A = 0,4182$.

19. tg $A = 0,3589$. *Solución.* 19° 45′. **20.** ctg $A = 3,298$.

21. cos $A = 0,7121$. *Solución.* 44° 36′. **22.** sen $A = 0,7121$.

23. tg $A = 4,200$. *Solución.* 76° 36′. **24.** ctg $A = 1,028$.

Hallar los valores de x desde 0° a 360° que satisfacen cada una de las siguientes ecuaciones:

25. cos $x = -\frac{1}{2}$, *Solución.* 120°, 240°.

26. sen $x = 0,3420$.

27. cos $x = 0,3420$. *Solución.* 70°, 290°.

28. tg $x = 0,4822$.

29. sen $x = -0,9442$. *Solución.* 250° 46′, 289° 14′.

30. cos $x = -0,4183$.

40. Términos que se presentan en los problemas trigonométricos. *Vertical* de un lugar es la línea que coincide con la dirección que marca la plomada.

Una línea horizontal es una perpendicular a la vertical.

Un plano vertical es el que contiene a la vertical.

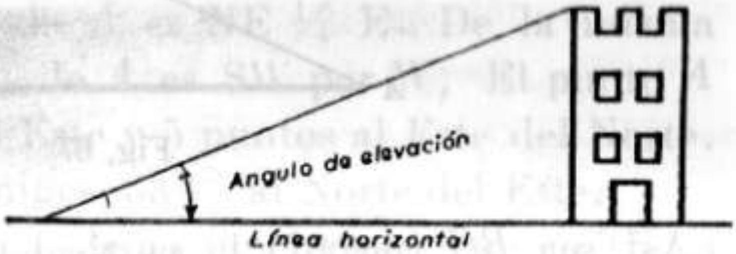


Fig. 65

Plano horizontal de un lugar es el plano perpendicular a la vertical.

Un ángulo vertical es aquel que está contenido en un plano vertical.

Un ángulo horizontal es uno contenido en un plano horizontal.

Angulo de elevación de un objeto sobre el plano horizontal del observador, es el ángulo vertical formado por la visual del observador al objeto y una visual horizontal.

Angulo de depresión de un objeto situado por debajo del plano horizontal del observador, es el ángulo vertical formado por la visual al objeto y la horizontal que pasa por el ojo del observador.

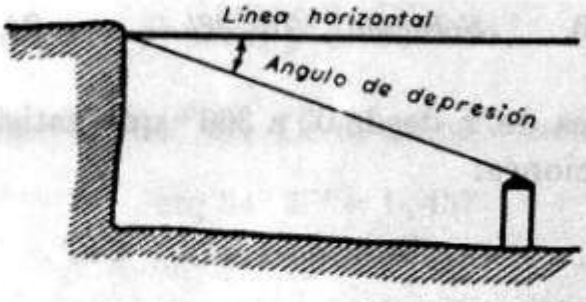


Fig. 66

Distancia horizontal entre dos puntos es la distancia de uno de ellos a la vertical del otro.

Distancia vertical entre dos puntos es la distancia de uno de ellos al plano horizontal que pasa por el otro.

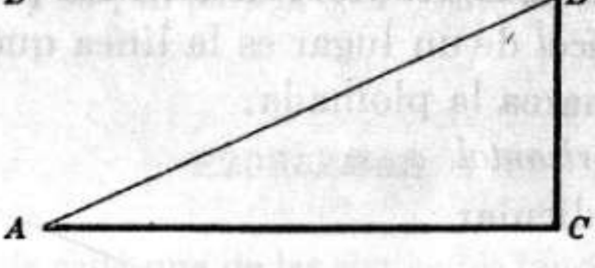


Fig. 67

Así, sea BC (fig. 67) la vertical de B, y supongamos que el plano horizontal que pasa por A corta a esta línea vertical en C; entonces a AC se le llama distancia horizontal entre A y B y a BC la distancia vertical.

La brújula náutica está dividida en 32 partes iguales; por tanto, cada parte $= 360^\circ : 32 = 11\frac{1}{4}^\circ$. La figura 68 muestra el nombre que se da a las diferentes divisiones. Los puntos Norte, Sur, Este, Oeste se llaman *puntos cardinales*, y sobre el papel estas direcciones se toman generalmente hacia arriba,

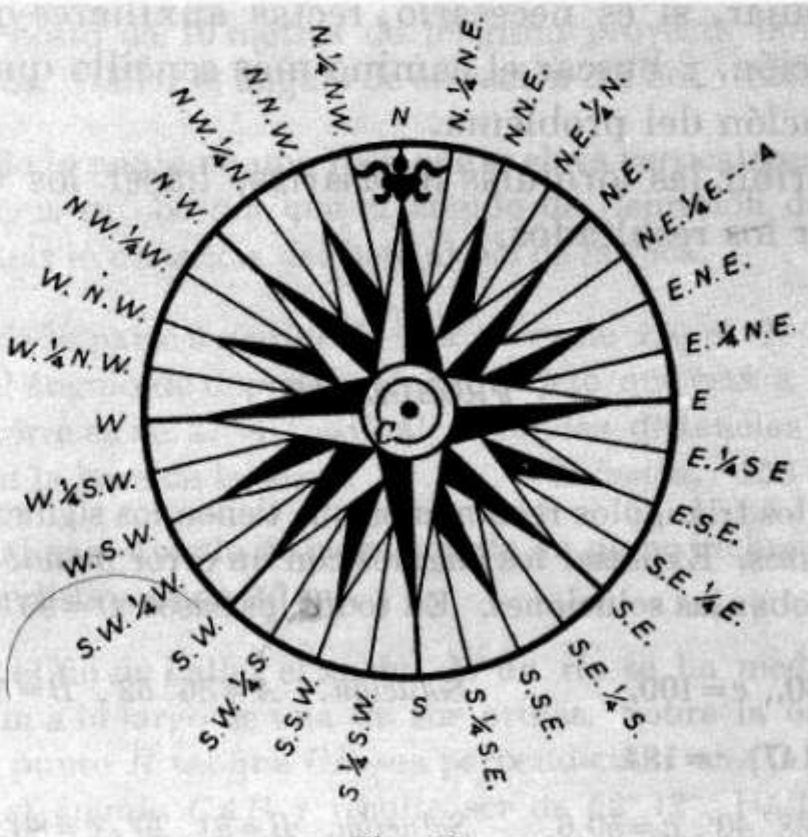


Fig. 68

hacia abajo, hacia la derecha y hacia la izquierda, respectivamente. La dirección de un objeto con relación a un observador C puede darse de varias maneras. Así, en la figura se dice que A está sobre la dirección NE por el E, desde C, o que desde C el rumbo de A es NE $\frac{1}{4}$ E. De la misma manera el rumbo de C desde A es SW por W, El punto A está 3 puntos al Norte del Este y 5 puntos al Este del Norte. También, E $33\frac{3}{4}^\circ$ N significa $33\frac{3}{4}^\circ$ al Norte del Este.

Para enseñar la aplicación de las funciones trigonométricas (razones) á la resolución de problemas prácticos, damos a continuación una gran variedad de problemas en los que se tiene que calcular alturas, distancias, ángulos, áreas, etc. Al resolver estos problemas es mejor seguir un camino definido. En general, podemos proceder como sigue:

1. Construir una figura a una escala conveniente que muestre las relaciones entre los segmentos y ángulos dados y los que se buscan.

2. Dibujar, si es necesario, rectas auxiliares que ayuden en la solución, y buscar el camino más sencillo que conduzca a la resolución del problema.

3. Escribir las fórmulas necesarias, hacer los cálculos, y comprobar los resultados.

PROBLEMAS

Resolver los triángulos rectángulos que tienen los siguientes elementos como datos. Expresar los ángulos con un error menor de un minuto. Comprobar las soluciones. En todos los casos $C=90°$.

1. $a=60$, $c=100$. *Solución.* $A=36° 52'$, $B=53° 8'$, $b=80$.

2. $a=147$, $c=184$.

3. $A=38° 40'$, $a=50{,}6$. *Solución.* $B=51° 20'$, $c=80{,}99$, $b=63{,}24$.

4. $A=38° 50'$, $c=13{,}5$.

5. $B=6° 12'$, $c=37{,}2$. *Solución.* $A=83° 48'$, $a=36{,}98$, $b=4{,}018$.

6. $B=43° 48'$, $b=50{,}95$.

7. $a=12{,}3$, $b=20{,}2$. *Solución.* $A=31° 21'$, $B=58° 39'$, $c=23{,}7$.

8. $a=101$, $b=116$.

9. $B=68° 50'$, $a=729{,}3$. *Solución.* $A=21° 10'$, $b=1\,884$, $c=2\,020$.

10. $B=10° 51'$, $c=0{,}7264$.

11. $A=64° 1'$, $b=200$. *Solución.* $B=25° 59'$, $a=410{,}4$, $c=456{,}5$.

12. $b=1{,}438$, $c=3{,}465$.

13. La longitud del hilo que sostiene una cometa es de 250 metros y el ángulo de elevación de la cometa es de 40°. Hallar su altura suponiendo que el hilo que la sostiene se mantiene recto.

Solución. 160,7 metros.

14. Desde un punto situado a 200 metros, medidos sobre una horizontal, del pie de una torre, se observa que el ángulo de elevación de la cúspide es de 60°. Calcular la altura de la torre.

15. Un poste de 10 metros de longitud proyecta una sombra de 8,391 metros. Hallar el ángulo de elevación del Sol. *Solución.* 50°.

16. Desde la punta de una roca que se eleva verticalmente 24 metros fuera del agua se observa que el ángulo de depresión de un bote es de 30°; hallar la distancia del bote al pie de la roca.

17. Desde la parte superior de una torre de 120 m de altura se observa que el ángulo de depresión de un objeto que está a nivel con la base de la torre es de 27° 43′. ¿Cuáles son las distancias del objeto a la punta y a la base de la torre? *Solución.* 258 m, 228 m.

18. ¿Cuál es el ángulo de elevación de un plano inclinado si se eleva 1 m en una distancia de 40 m?

19. Con el fin de hallar el ancho de un río se ha medido una base AC de 350 m a lo largo de una de sus orillas. Sobre la orilla opuesta se toma un punto B tal que CB sea perpendicular a AC. También se ha medido el ángulo CAB y resulta ser de 52° 12′. Hállese el ancho del río. *Solución.* 451,2 m.

20. Desde la parte superior de una torre se ha observado que el ángulo de depresión del extremo de una línea base horizontal de 300 m de longitud, medidos a partir del pie de la torre, es de 21° 16′. Hallar la altura de la torre.

21. ¿Qué ángulo forma la diagonal de un cubo con la diagonal de una cara del mismo cubo trazada desde el mismo vértice?

Solución. 35° 16′.

22. La longitud del lado de un octágono regular es 12 cm. Hallar los radios de los círculos inscrito y circunscrito.

23. Si una cuerda de 41,36 m subtiende un arco de 145° 37′ ¿cuál es el radio del círculo? *Solución.* 21,65 m.

24. Si el diámetro de un círculo es de 3268 m, calcular el ángulo central correspondiente a un arco cuya cuerda mide 1027 m.

25. Un navío sale exactamente sobre el rumbo NE a la velocidad de 10 millas por hora. Hallar la velocidad a la cual se está moviendo hacia el Norte. *Solución.* 7,07 millas por hora.

26. Un navío sale exactamente hacia el Este a la velocidad de 7,8 millas por hora. Se observa un faro, exactamente hacia el rumbo Norte, a las 10 horas 37 minutos y a 33° al Oeste del Norte a las 12 horas 43 minutos. Hallar la distancia del faro a cada uno de los puntos de observación.

27. Un navío sale exactamente rumbo al Este a una velocidad uniforme. A las 7 horas se observa un faro exactamente hacia el Norte, a 10,32 millas de distancia, y a las 7 horas 30 minutos el faro está a 18° 13′ al Oeste del Norte. Hallar la velocidad a la que salió el navío y el rumbo del faro a las 10 horas.

Solución. 6,79 millas por hora, 63° 8′ O del N.

28. Una escalera de 12 m de longitud puede colocarse de tal manera que alcance una ventana de 10 m de altura de un lado de la calle y, haciendo girar la escalera sin mover su base, puede alcanzar una ventana que está a 6 m de altura en el otro lado de la calle. Hállese el ancho de la calle.

29. Desde el punto medio de la distancia entre los pies de dos torres, los ángulos de elevación de sus extremos superiores son 30° y 60°, respectivamente. Demostrar que la altura de una de las torres es el triple de la otra.

30. Un hombre observa desde un globo que las visuales a las bases de dos torres que están apartadas por una distancia de un kilómetro, medido sobre un plano horizontal, forman un ángulo de 70°. Si el observador está exactamente sobre la vertical del punto medio de la distancia entre las dos torres, calcular la altura del globo.

31. Dos boyas son observadas en la dirección Sur desde lo alto de un acantilado cuya parte superior está 312 m sobre del nivel del mar. Hallar la distancia entre las boyas si sus ángulos de depresión medidos desde la punta del acantilado son 46° 18′ y 27° 15′, respectivamente. *Solución.* 307,7 m.

32. Dos ciudades, A y B, están sobre una carretera que corre de Norte a Sur. Una ciudad, C, a 11 Km de esta carretera, está a 25° al Oeste del Sur de A y a 35° al Oeste del Sur de B. ¿A qué distancia está la ciudad A de la ciudad B si las ciudades y la carretera están sobre el mismo plano horizontal?

33. Desde cada una de dos estaciones situadas en la dirección Este Oeste y a 1 milla de distancia, se observa que el ángulo de elevación de un globo es de 45°. Si el globo se encuentra hacia el NO y NE de las estaciones, respectivamente, ¿a qué altura está?

Solución. 3 733 pies.

34. Al aproximarse una patrulla de reconocimiento a un fuerte (fig. 69) situado en una llanura encuentra que, desde un cierto lugar, el fuerte se ve bajo un ángulo de 10°, y que desde otro lugar, 200 metros más cerca del fuerte, éste se ve bajo un ángulo de 15°. ¿Cuál es la altura del fuerte y cuál es su distancia al segundo lugar de observación?

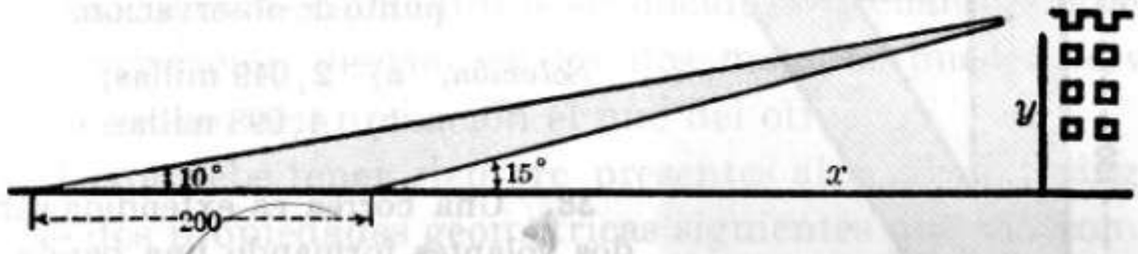


Fig. 69

Sugestión. Designando la altura por y y la distancia por x, tenemos

$$y = x \operatorname{tg} 15°, \qquad \text{Por (40) (Art. 37)}$$

también,

$$y = (x + 200) \operatorname{tg} 10°. \qquad \text{Por (40) (Art. 37).}$$

Se resuelve este sistema de ecuaciones y se sustituyen los valores de tg 15° y tg 10° obtenidos de la tabla del Artículo 7.

Solución. $x = 385$ m, $y = 103$ m.

35. Con el fin de medir la altura, h, de un objeto se ha medido la distancia entre dos puntos, A y B, a lo largo de una recta que pasa por su base en un plano horizontal y resultó ser l metros. Los ángulos de elevación de la punta del objeto desde A y B resultaron ser α y β, respectivamente, siendo A el punto más cercano a la base. Demostrar que la altura está dada por la fórmula $h = \dfrac{l}{\operatorname{ctg} \beta - \operatorname{ctg} \alpha}$ si A y B

están del mismo lado, y por $h = \dfrac{l}{\text{ctg }\beta + \text{ctg }\alpha}$ si A y B están de lados opuestos de la base del objeto.

36. Una asta de bandera de 6 metros de longitud se alza sobre la azotea de una casa. Desde un punto del plano de la base de la casa los ángulos de elevación de la punta y base del asta son 60° y 45°, respectivamente. Hállese la altura de la casa.

37. El piloto de un avión observa que el ángulo de depresión de una luz situada exactamente abajo de su línea de vuelo es de 30°. Un minuto más tarde el ángulo de depresión es de 45°. Si está volando horizontalmente y siguiendo una línea recta a la velocidad de 90 millas por hora, hallar

a) la altura a que está volando;
b) la distancia de la luz al primer punto de observación.

Solución. a) 2,049 millas;
b) 4,098 millas.

38. Una correa es extendida sobre dos volantes formando una banda de transmisión. Los radios de los volantes son de 21 dm y 3 dm, respectivamente, y sus centros están a una distancia de 36 dm. Calcular la longitud de la correa.

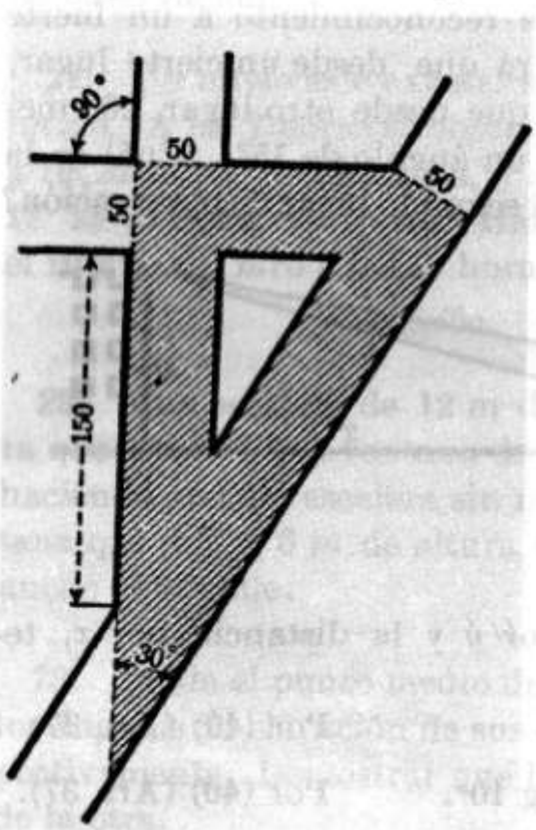


Fig. 70

39. Hallar el número de pies cuadrados de pavimento necesarios para cubrir la porción sombreada de las calles que aparecen en la figura 70, siendo todas las calles de 50 pies de ancho.

$$\textit{Solución.}\quad \frac{28\,750}{\sqrt{3}} + 7\,500 = 24\,099.$$

41. Resolución de triángulos oblicuángulos. En Geometría plana se enseña a resolver triángulos gráficamente. Es decir, se enseña a construir un triángulo conociendo

CASO I. *Dos ángulos y un lado.*

CASO II. *Dos lados y un ángulo opuesto a uno de ellos.*

CASO III. *Dos lados y el ángulo comprendido.*

CASO IV. *Tres lados.*

Una vez construído el triángulo buscado se pueden encontrar los elementos desconocidos midiéndolos con una regla o un transportador. Teniendo en cuenta las limitaciones de nuestros sentidos y las imperfecciones de los instrumentos usados, se comprende que los resultados obtenidos de tales medidas serán, en general, aproximados. Después de haber construído el triángulo con los elementos dados, por los métodos geométricos, se verá que la Trigonometría nos enseña cómo calcular los elementos desconocidos con cualquier grado de aproximación deseado, y los dos métodos pueden servir entonces como comprobación el uno del otro.

El lector debe tener siempre presentes al resolver triángulos las dos propiedades geométricas siguientes que son comunes a todos los triángulos:

(41) La suma de los tres ángulos es igual a 180°.

(42) El lado mayor se opone al ángulo mayor y recíprocamente.

La resolución trigonométrica de triángulos oblicuángulos depende de la aplicación de tres leyes —la ley de los senos, la ley de los cosenos y la ley de las tangentes— a cuya deducción vamos a enfocar nuestra atención.

42. Ley de los senos.

Teorema. *Los lados de un triángulo son proporcionales a los senos de los ángulos opuestos.*

Demostración. La figura 71 representa un triángulo cuyos ángulos son todos agudos, y la figura 72 representa otro con uno de sus ángulos obtuso (el ángulo A).

Tenemos que demostrar que

$$\textbf{(43)} \qquad \frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}.$$

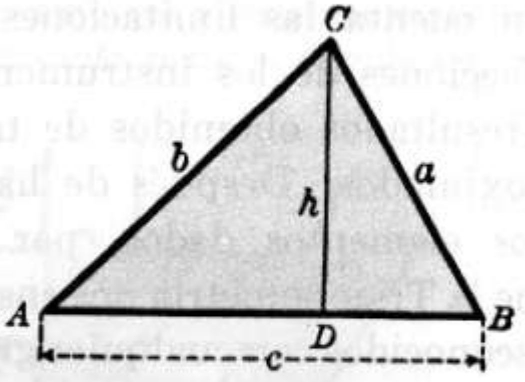


Fig. 71

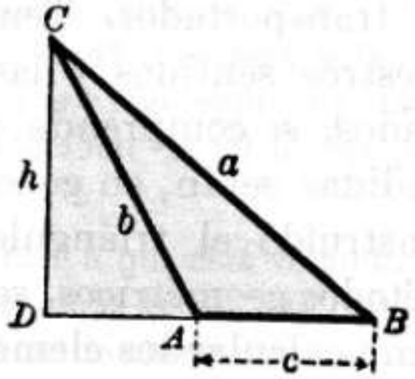


Fig. 72

Tracemos la perpendicular CD $(=h)$ a AB o a la prolongación de AB. De cualquiera de las dos figuras, considerando el triángulo rectángulo ACD, se deduce:

$$(A) \qquad \operatorname{sen} A = \frac{h}{b}.$$

[En la figura 72, sen $A = \operatorname{sen}(180^\circ - A) = \operatorname{sen} CAD$ (Art.25).]

También, considerando el triángulo rectángulo BCD,

$$(B) \qquad \operatorname{sen} B = \frac{h}{a}.$$

Dividiendo (A) por (B), obtenemos

$$\frac{\operatorname{sen} A}{\operatorname{sen} B} = \frac{a}{b},$$

o, por una propiedad de las proporciones,

$$(C)\qquad \frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B}.$$

Análogamente, trazando las alturas correspondientes a los vértices A y B, obtenemos:

$$(D)\qquad \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}$$

y

$$(E)\qquad \frac{c}{\text{sen } C} = \frac{a}{\text{sen } A},$$

respectivamente. Igualando las proporciones (C), (D), (E), obtenemos **(43)**.

Cada una de estas razones iguales tiene un significado geométrico sencillo, como puede verse si la *ley de los senos* se demuestra como sigue: Consideremos un círculo circunscrito al triángulo ABC (fig. 73) y tracemos los radios OB y OC. Sea R el radio del círculo. Tracemos OM perpendicular a BC.

Como el ángulo inscrito A es igual a la mitad del arco BC y el ángulo central BOC está medido por el arco completo BC, se desprende que el ángulo $BOC = 2\,A$, o sea,

$$\text{ángulo } BOM = A.$$

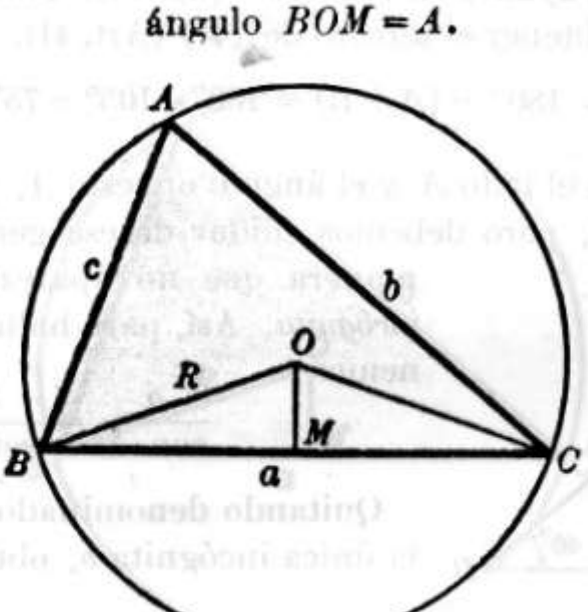


Fig. 73

Entonces, $BM = R \text{ sen } BOM = R \text{ sen } A,$ por **(38)** (Art. 37)

y $a = 2\ BM = 2\ R \text{ sen } A,$

o sea, $$2\ R = \frac{a}{\text{sen } A}.$$

De manera semejante puede demostrarse que

$$2\ R = \frac{b}{\text{sen } B} \quad \text{y} \quad 2\ R = \frac{c}{\text{sen } C}.$$

En consecuencia, igualando los resultados, obtenemos

$$2\ R = \frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B} = \frac{c}{\text{sen } C}.$$

La razón de cualquiera de los lados de un triángulo al seno del ángulo opuesto es numéricamente igual al diámetro del círculo circunscrito.

Es evidente que un triángulo puede resolverse con la ayuda de la ley de los senos *si dos de los tres elementos conocidos son un lado y su ángulo opuesto*. En el caso en que se conozcan dos ángulos y el lado común a ellos se puede reducir también al caso anterior, ya que, por **(41)** (Art. 41) podemos hallar el ángulo que se opone al lado dado.

EJEMPLO. Dados $A = 65°$, $B = 40°$, $a = 50$ m; resolver el triángulo.

Solución. Construyamos el triángulo (fig. 74). Como se conocen dos ángulos podemos obtener el tercero de **(41)** (Art. 41). Luego,

$$C = 180° - (A + B) = 180° - 105° = 75°.$$

Como conocemos el lado A y el ángulo opuesto A, podemos emplear la ley de los senos, pero debemos cuidar de escoger tales razones de manera que no aparezca más que *una incógnita*. Así, para hallar el lado b, obtenemos

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B}.$$

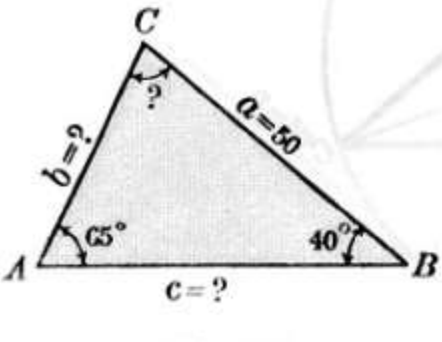


Fig. 74

Quitando denominadores y despejando la única incógnita b, obtenemos

$$b = \frac{a \text{ sen } B}{\text{sen } A}.$$

Sustituyendo los valores numéricos de sen A y sen B hallados de la tabla del Artículo 7, y $a=50$ m, obtenemos

$$b=\frac{50\times 0,6428}{0,9063}=35,46 \text{ metros.}$$

Análogamente, para hallar el lado c, usamos

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A}=\frac{c}{\operatorname{sen} C}.$$

Quitando denominadores y despejando c, obtenemos

$$c=\frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}=\frac{50\times 0,9659}{0,9063}=53,29 \text{ metros.}$$

Midiendo las mismas incógnitas en la figura comprobamos que no hay errores grandes en los resultados.

Como ya conocemos todos los lados y los ángulos del triángulo, decimos que éste está resuelto.

PROBLEMAS

Resolver los siguientes triángulos:

1. Dados $a=40$, $A=60°$, $B=45°$.

Solución. $C=75°$, $b=32,66$, $c=44,61$.

2. Dados $b=7,07$, $A=30°$, $C=105°$.

3. Dados $c=60$, $A=50°$, $B=75°$.

Solución. $C=55°$, $b=70,74$, $a=56,10$.

4. Dados $a=20$, $B=45°$, $C=60°$.

5. Dados $a=550$, $A=10° 12'$, $B=46° 36'$.

Solución. $C=123° 12'$, $b=2257$, $c=2599$.

6. Dados $B=100° 10'$, $C=45° 40'$, $c=3060$.

43. Caso ambiguo en que se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos. La solución del triángulo en este caso dependerá de la ley de los senos. Debemos hallar primero el ángulo desconocido que se opone al otro de los lados dados. Pero cuando solamente se conoce el seno de un ángulo, el ángulo puede tener dos valores que son suplementarios entre sí, y se puede tomar cualquiera de los dos valores a menos que uno de ellos quede excluído por las condiciones del problema (Art. 25).

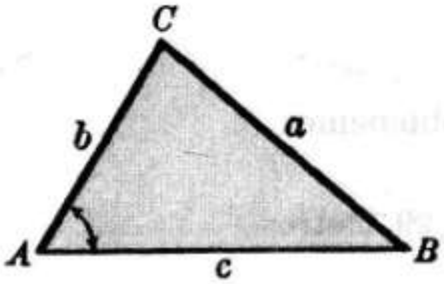


Fig. 75

Sean a y b los lados dados y A (opuesto al lado a) el ángulo dado.

Si $a > b$ (fig. 75), entonces, por Geometría, $A > B$, y B debe ser agudo cualquiera que sea el valor de A, porque el triángulo puede tener solamente un ángulo obtuso. Por tanto, hay *uno, y solamente un triángulo* que satisface las condiciones dadas.

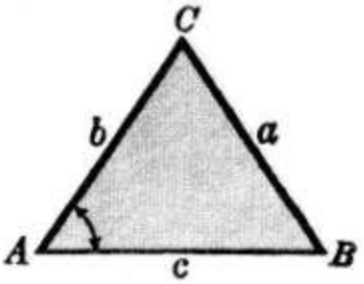


Fig. 76

Si $a = b$, entonces, por Geometría, $A = B$, y en este caso ambos, A y B, deben ser agudos, y *el triángulo buscado es isósceles* (fig. 76).

Si $a < b$, entonces, por Geometría, $A<B$, y A debe ser agudo para que el triángulo sea posible, y cuando A es agudo, es evidente (fig. 77) que *los dos triángulos* ACB *y* ACB′ *satisfacen las condiciones dadas* siempre que a sea mayor que la perpendicular CP; es decir, siempre que

$$a > b \operatorname{sen} A.$$

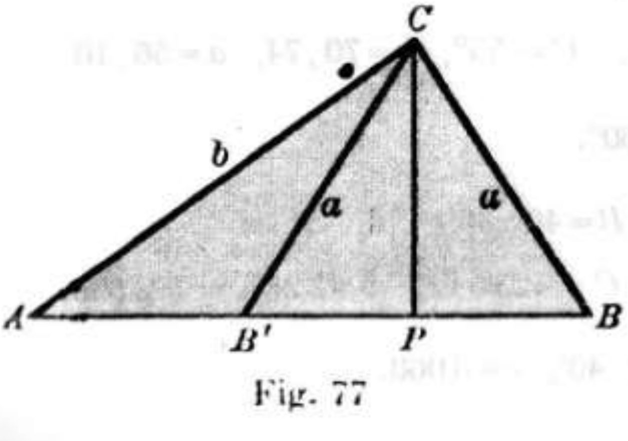


Fig. 77

Los ángulos ABC y $AB'C$ son suplementarios (ya que $\angle B'BC = \angle BB'C$); ellos son, en suma, los ángulos suplementarios obtenidos (usando la ley de los senos) de la fórmula

$$\operatorname{sen} B = \frac{b \operatorname{sen} A}{a}.$$

Es decir, obtenemos los dos valores de B buscando el valor correspondiente al ángulo agudo B en una tabla de senos, y el valor del ángulo obtuso suplementario de la fórmula

$$B' = 180^\circ - B.$$

Pero, si $a = b$ sen $A = CP$, entonces sen $B = 1$, $B = 90^\circ$, y *el triángulo buscado es un triángulo rectángulo.*

Si $a < b$ sen A (es decir, menor que CP), entonces sen $B > 1$, y *el triángulo es imposible.*

Estos resultados pueden resumirse como sigue:

Dos soluciones: *Si* A *es agudo y el valor de* a *está comprendido entre* b *y* b *sen* A.

Ninguna solución: *Si* A *es agudo y* a<b *sen* A, *o si* A *es obtuso y* a<b *o* a=b.

Una solución: *En todos los demás casos.*

El número de soluciones puede generalmente determinarse por una construcción a escala natural o reducida del triángulo. En caso de duda hállese el valor de b sen A y háganse las pruebas anteriores.

Ejemplo 1. Dados $a = 21$, $b = 32$, $A = 115^\circ$; hallar los elementos restantes.

Solución. En este caso, $a<b$ y $A>90^\circ$; por tanto, el triángulo es imposible y no hay solución.

Ejemplo 2. Resolver un triángulo dados $a=32$, $b=86$, $A=30^\circ$.

Solución. Aquí b sen $A = 86 \times \frac{1}{2} = 43$; por tanto, $a<b$ sen A, y no hay ninguna solución.

Ejemplo 3. Dados $a = 40$, $b = 30$, $A = 75°$; hallar los elementos restantes.

Solución. Como $a > b$ y A es agudo hay solamente una solución. (fig. 78).

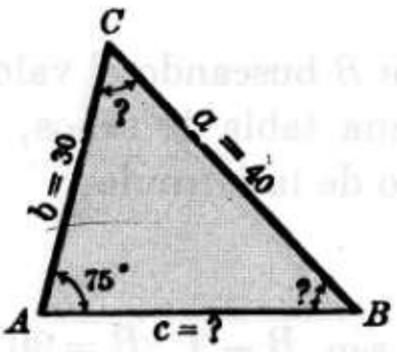


Fig. 78

Por la ley de los senos,

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B};$$

de donde, $\text{sen } B = \dfrac{b \text{ sen } A}{a} = \dfrac{30 \times 0,9659}{40}$

$= 0,7244,$

o sea, $B = 46° 25'$, que es el único valor admisible de B.

Entonces, $C = 180° - (A + B) = 180° - 121° 25' = 58° 35'.$

Para hallar c, tenemos, por la ley de los senos,

$$\frac{c}{\text{sen } C} = \frac{a}{\text{sen } A},$$

de donde, $$c = \frac{a \text{ sen } C}{\text{sen } A} = \frac{40 \times 0,8534}{0,9659} = 35,34.$$

Compruébense los resultados midiéndolos en la figura.

Ejemplo 4. Resolver el triángulo, teniendo como datos

$$b = 15, \quad a = 12, \quad A = 52°.$$

Solución. En este caso b sen $A = 15 \times 0,7880 = 11,82$; por tanto, como A es agudo y a está comprendido entre b y b sen A, hay dos soluciones. Es decir, hay dos triángulos, ACB_1 y ACB_2 (fig. 79) que satisfacen las condiciones dadas. Por la ley de los senos,

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{b}{\text{sen } B_1},$$

de donde, $$\text{sen } B_1 = \frac{b \text{ sen } A}{a} = \frac{15 \times 0,7880}{12} = 0,9850.$$

Este valor corresponde al seno del ángulo $B_1 = 80° \ 4'$, y al del ángulo suplementario que es

$$B_2 = 180° - B_1 = 99° \ 56'.$$

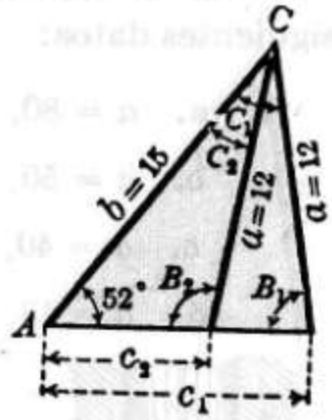


Fig. 79

Resolvamos primero completamente el triángulo AB_1C.

$$C_1 = 180° - (A + B_1) = 47° \ 56'.$$

Por la ley de los senos,

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{c_1}{\text{sen } C_1},$$

de donde, $$c_1 = \frac{a \text{ sen } C_1}{\text{sen } A} = \frac{12 \times 0,7423}{0,7880}$$

$$= 11,30.$$

Ahora, resolviendo el triángulo AB_2C,

$$C_2 = 180° - (A + B_2) = 28° \ 4'.$$

Por la ley de los senos,

$$\frac{a}{\text{sen } A} = \frac{c_2}{\text{sen } C_2},$$

de donde, $$c_2 = \frac{a \text{ sen } C_2}{\text{sen } A} = \frac{12 \times 0,4705}{0,7880} = 7,165.$$

Las soluciones son entonces:

Para el triángulo AB_1C	Para el triángulo AB_2C
$B_1 = 80° \ 4'$,	$B_2 = 99° \ 56'$,
$C_1 = 47° \ 56'$,	$C_2 = 28° \ 4'$,
$c_1 = 11,3.$	$c_2 = 7,2.$

Compruébense los resultados midiéndolos sobre la figura.

En el caso ambiguo debe cuidarse de combinar apropiadamente los lados y ángulos calculados.

PROBLEMAS

Hallar el número de triángulos que pueden construirse con los siguientes datos:

1. a. $a = 80$, $b = 100$, $A = 30°$. *Solución.* Dos.

b. $a = 50$, $b = 100$, $A = 30°$. Uno.

c. $a = 40$, $b = 100$, $A = 30$. Ninguno.

d. $a = 13$, $b = 11$, $A = 69°$. Uno.

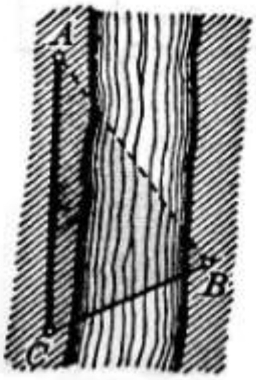


Fig. 80

2. a. $a = 70$, $b = 75$, $A = 60°$.

b. $a = 134$, $b = 84$, $B = 52°$.

c. $a = 200$, $b = 100$, $A = 30°$.

d. $b = 300$, $C = 45°$, $c = 250$.

Resolver los siguientes triángulos:

3. Datos: $a = 18$, $b = 20$, $A = 55° \, 24'$.

Solución. $B_1 = 66° \, 9'$, $C_1 = 58° \, 27'$, $c_1 = 18,64$.
$B_2 = 113° \, 51'$, $C_2 = 10° \, 45'$, $c_2 = 4,081$.

4. Datos: $a = 3\sqrt{2}$, $b = 2\sqrt{3}$, $A = 60°$.

5. Datos: $b = 19$, $c = 18$, $C = 15° \, 49'$.

Solución. $B_1 = 16° \, 43'$, $A_1 = 147° \, 28'$, $a_1 = 35,52$.
$B_2 = 163° \, 17'$, $A_2 = 0° \, 54'$, $a_2 = 1,037$.

6. Datos: $a = 119$, $b = 97$, $A = 50°$.

7. Datos: $a = 120$, $b = 80$, $A = 60°$.

Solución. $B = 35° \, 16'$, $C = 84° \, 44'$, $c = 138$.

8. Se requiere hallar la distancia horizontal de un punto A (fig. 80) a un punto inaccesible B de la orilla opuesta de un río. Para ello medimos una distancia horizontal conveniente, como AC, y luego medimos los ángulos CAB y ACB.

Si $AC = 283$ m, ángulo $CAB = 38°$, y ángulo $ACB = 66° \, 18'$, calcular el lado AB del triángulo ABC.

9. Un terraplén del ferrocarril se levanta sobre un plano horizontal y se requiere encontrar la distancia de un punto A (fig. 81) de dicho plano a un punto B de la parte superior del terraplén. Escójase un punto de C en el pie del terraplén que esté en el mismo plano vertical que A y B, y mídanse las distancias AC y CB, y el ángulo BAC.

Si $AC = 14{,}55$ m, $BC = 25{,}2$ m, y el ángulo $BAC = 21° \, 30'$, calcular el lado AB. *Solución.* 38, 1 metros.

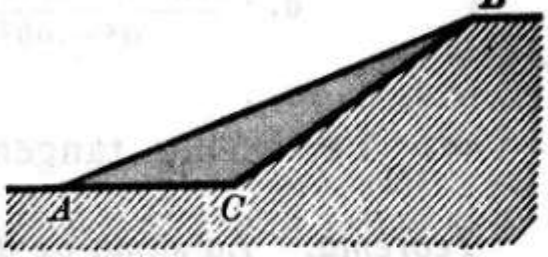


Fig. 81

10. Desde dos puntos, B y C, de una carretera situados a una distancia de 270 m, se observa un árbol A. Sabiendo que el ángulo BCA es de 55° y el ángulo CBA de 65°, calcular la distancia del árbol al punto más cercano B.

11. Para determinar la distancia de un lugar B a una posición enemiga A, se han medido una base BC y los ángulos ABC y BCA. Si dichas medidas son 1 006 m, 44° y 70°, respectivamente, hallar la distancia AB. *Solución.* 1 035 metros.

12. Un solar de forma triangular tiene dos lados de longitudes 140, 5 m y 170, 6 m, y el ángulo opuesto al primero es de 40°. Hallar la longitud de una cerca que lo rodee completamente.

13. Dos boyas están apartadas por una distancia de 64, 2 m, y un bote está a 74, 1 m de la más cercana. El ángulo que forman las dos visuales del bote a las boyas es de 27° 18′. ¿Qué distancia hay del bote a la boya más alejada? *Solución.* 120, 3 metros.

14. Si R es el radio del círculo circunscrito, demostrar la siguiente igualdad para cualquier triángulo:

$$R\,(\text{sen } A + \text{sen } B + \text{sen } C) = s.$$

[Usese la fórmula $s = \frac{1}{2}(a+b+c)$.]

15. Demostrar las siguientes igualdades para cualquier triángulo:

a. $a = b \cos C + c \cos B,$

$b = a \cos C + c \cos A,$

$c = a \cos B + b \cos A.$

b. $\sqrt{bc \text{ sen } B \text{ sen } C} = \dfrac{b^2 \text{ sen } C + c^2 \text{ sen } B}{b+c}$.

c. $\dfrac{\text{sen } A + 2 \text{ sen } B}{a+2b} = \dfrac{\text{sen } C}{c}$.

d. $\dfrac{\text{sen}^2 A - m \text{ sen}^2 B}{a^2 - mb^2} = \dfrac{\text{sen}^2 C}{c^2}$.

44. Ley de las tangentes.

Teorema. *La suma de dos lados de un triángulo es a su diferencia como la tangente de la mitad de la suma de los ángulos opuestos a estos lados es a la tangente de la mitad de la diferencia de estos ángulos.*

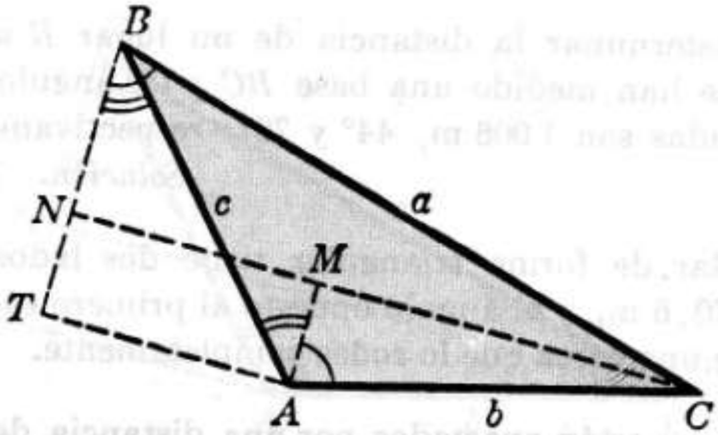


Fig. 82

Tomando los lados a y b del triángulo ABC (fig. 82), vamos a demostrar que

$$(44) \qquad \frac{a+b}{a-b} = \frac{\text{tg } \frac{1}{2}(A+B)}{\text{tg } \frac{1}{2}(A-B)}.$$

Demostración. Tracemos NC, bisectriz del ángulo C, BN y AM perpendiculares a NC, y AT paralela a NC hasta encontrar a la prolongación de BN. Vamos a ver que

$$\angle NBC = \angle MAC = \tfrac{1}{2}(A+B),$$
$$\angle TBA = \angle MAB = \tfrac{1}{2}(A-B).$$

En efecto, por ser

$$\angle NBC = \angle MAC = 90^\circ - \tfrac{1}{2}C = \frac{180^\circ - C}{2},$$

y $$180^\circ - C = A + B,$$

resulta

$$\angle NBC = \angle MAC = \tfrac{1}{2}(A+B). \tag{1}$$

Análogamente,

$$\angle TBA = \angle MAB = A - \tfrac{1}{2}(A+B) = \tfrac{1}{2}(A-B). \tag{2}$$

Ahora, $$\operatorname{tg} \angle TBA = \frac{TA}{BT} = \frac{NM}{BT} = \frac{NC - MC}{BN + NT}.$$

Y como $NT = AM$, resulta

$$\operatorname{tg} \angle TBA = \frac{NC - MC}{BN + AM}. \tag{3}$$

En el triángulo rectángulo BNC,

$$NC = a \operatorname{sen} \angle NBC. \tag{4}$$

$$BN = a \cos \angle NBC. \tag{5}$$

En el triángulo rectángulo ACM,

$$MC = b \operatorname{sen} \angle MAC. \tag{6}$$

$$MA = b \cos \angle MAC. \tag{7}$$

Sustituyendo de (4) a (7) en el segundo miembro de (3), y usando (1) y (2), obtenemos

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{(a-b) \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}(A+B)}{(a+b) \cos \tfrac{1}{2}(A+B)}. \tag{8}$$

Por tanto, por **(16)** (Art. 17),

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{a-b}{a+b} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A+B).$$

Escribiendo esto en forma de proporción, obtenemos **(44)**.

Si $b>a$, entonces $B>A$, y las diferencias $a-b$ y $A-B$ son negativas. La fórmula también es verdadera en este caso, pero, para evitar que haya cantidades negativas, es mejor escribir la fórmula en la forma

$$\frac{b+a}{b-a}=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B+A)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B-A)}.$$

Análogamente,

$$\frac{c+a}{c-a}=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(C+A)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(C-A)},$$

$$\frac{b+c}{b-c}=\frac{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B+C)}{\operatorname{tg}\frac{1}{2}(B-C)}.\ *$$

Cuando se conocen dos lados y el ángulo comprendido, como a, b y C, la ley de las tangentes puede emplearse para encontrar los dos ángulos desconocidos A y B. Como

$$a+b,\ a-b,\ A+B\,(=180°-C),$$

y, por lo tanto, también $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A+B)$ son conocidas, quitamos denominadores en **(44)** y despejamos la cantidad desconocida $\operatorname{tg}\frac{1}{2}(A-B)$. Esto da

$$\textbf{(45)}\qquad \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A-B)=\frac{a-b}{a+b}\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A+B).$$

Vamos a mostrar el procedimiento por medio de ejemplos.

Ejemplo 1. Resolver un triángulo dados

$$a=872{,}5,\quad b=632{,}7,\quad C=80°.$$

Solución. $a+b=1505{,}2$, $a-b=239{,}8$, $A+B=180°-C=100°$, y $\frac{1}{2}(A+B)=50°$.

---

* Estas pueden también deducirse cambiando las letras en orden cíclico (ver la nota correspondiente al Artículo 45).

De (45), $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+B) = \operatorname{tg} 50° = 1{,}192$,

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{a-b}{a+b} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A+B) = \frac{239{,}8}{1\,505{,}2} \times 1{,}192 = 0{,}1898.$$

De donde, $$\tfrac{1}{2}(A-B) = 10°\,45'.$$

Sumando este resultado a $\frac{1}{2}(A+B) = 50°$, resulta

$$A = 60°\,45'.$$

Restando el resultado de $\frac{1}{2}(A+B) = 50°$, resulta,

$$B = 39°\,15'.$$

Para hallar el lado c usemos la ley de los senos. Entonces,

$$c = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A} = \frac{872{,}5 \times 0{,}9848}{0{,}8725} = 984{,}8.$$

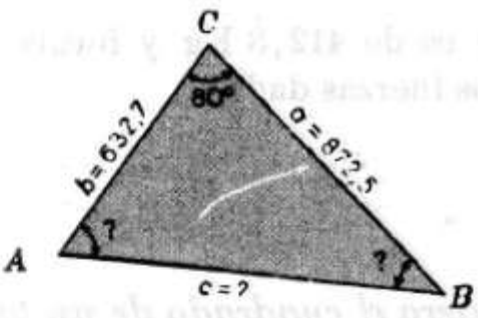


Fig. 83

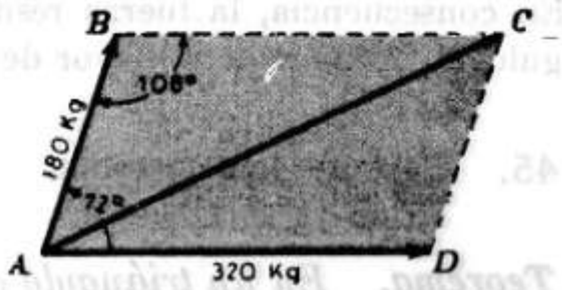


Fig. 84

EJEMPLO 2. Dos fuerzas de intensidad 180 Kg y 320 Kg, respectivamente, actúan sobre un cuerpo formando entre sí un ángulo de 72°. Hallar la intensidad y la dirección de la fuerza resultante.

Solución. Por el principio conocido como la *Ley del paralelogramo de las fuerzas*, si AB y AD (fig. 84) representan las fuerzas dadas, la intensidad y la dirección de la resultante están representadas por la diagonal AC del paralelogramo cuyos lados son AB y AD. La acción de la sola fuerza AC en A es equivalente a la acción combinada de las dos fuerzas AB y AD.

Se desea encontrar AC y el ángulo BAC o el ángulo CAD. Para esto tenemos que resolver el triángulo ABC. Sean

$b = AC$, $c = AB$, $a = BC = AD$, $A =$ ángulo BAC y $C =$ ángulo BCA, y apliquemos la ley de las tangentes. Entonces,

$a+c=500$, $a-c=140$, $B=180°-72°=108°$, $A+C=72°$, $\frac{1}{2}(A+C)=36°$.

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A-C)=\frac{a-c}{a+c} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A+C)=\frac{140}{500} \operatorname{tg} 36°.$$

$$=0,28\times 0,7265=0,2034.$$

De donde, $\frac{1}{2}(A-C)=11°\ 30'$.

Pero $\frac{1}{2}(A+C)=36°$.

Por tanto, $A=47°\ 30'$ y $C=$ ángulo $CAD=24°\ 30'$.

Para hallar b usamos la ley de los senos. Tenemos que

$$b=\frac{c \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} C}=\frac{180\times 0,9511}{0,4147}=412,8.$$

En consecuencia, la fuerza resultante es de 412,8 Kg y forma un ángulo de 24° 30′ con la mayor de las dos fuerzas dadas.

45. Ley de los cosenos.

Teorema. *En un triángulo cualquiera el cuadrado de un lado es igual a la suma de los cuadrados de los otros dos menos el doble producto de estos dos lados por el coseno del ángulo que forman.*

Demostración. Supongamos que queremos encontrar el lado a en función de los otros dos lados, b y c, y del ángulo que forman A. El teorema que vamos a demostrar dice que

(46) $$a^2=b^2+c^2-2\ bc \cos A.$$

Consideremos una cualquiera de las dos figuras, 85 ó 86. Tendremos:

$$a^2=\overline{CD}^2+\overline{DB}^2,$$

$$b^2=\overline{CD}^2+\overline{AD}^2.$$

Restando estas igualdades, hallamos

(1) $$a^2 - b^2 = \overline{DB}^2 - \overline{AD}^2.$$

En la figura 85, $DB = c - AD$. Elevando al cuadrado y sustituyendo en el segundo miembro de (1), obtenemos (ya que $\overline{AD}^2$ se reduce)

(2) $$a^2 - b^2 = c^2 - 2c \cdot AD.$$

En la figura 86, $DB = AD + c$. Elevando al cuadrado y sustituyendo en el segundo miembro de (1), resulta

(3) $$a^2 - b^2 = c^2 + 2c \cdot AD.$$

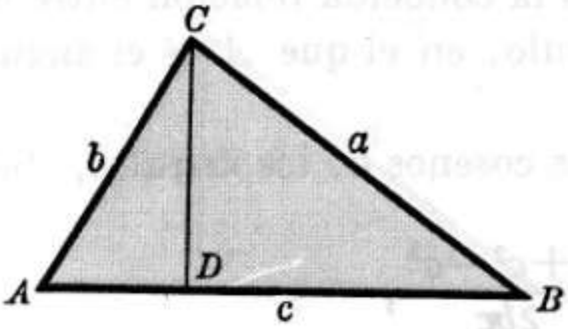


Fig. 85

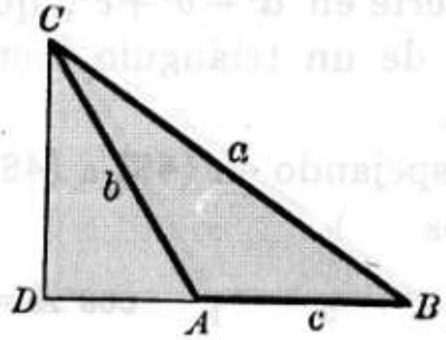


Fig. 86

Pero, del triángulo rectángulo CAD en la figura 85, tenemos

(4) $$AD = b \cos A. \qquad \text{Por (39) (Art. 37)}$$

Sustituyendo este valor de AD en el segundo miembro de (2), y despejando a^2, hallamos

(5) $$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos A.$$

Y, del triángulo rectángulo CAD en la figura 86,

(6) $$AD = b \cos \angle DAC. \qquad \text{Por (39) (Art. 37)}$$

Pero $A = 180° - \angle DAC$, y, por lo tanto,

$$\cos A = -\cos \angle DAC. \qquad \text{Por el Artículo 25.}$$

Entonces, por (6), $AD = -b \cos A$ (en la figura 86).

Sustituyendo este valor de AD en el segundo miembro de (3), y despejando a^2, obtenemos (5), como anteriormente. Por tanto, en cualquiera de las dos figuras,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos A.$$

Análogamente,

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2\,ac \cos B, \tag{47}$$

$$c^2 = a^2 + b^2 - 2\,ab \cos C. \; * \tag{48}$$

Obsérvese que si $A = 90°$, entonces $\cos A = 0$, y **(46)** se convierte en $a^2 = b^2 + c^2$, que es la conocida relación entre los lados de un triángulo rectángulo, en el que A es el ángulo recto.

Despejando en **(45)** a **(48)** los cosenos de los ángulos, obtenemos

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc}, \tag{49}$$

$$\cos B = \frac{a^2 + c^2 - b^2}{2ac}, \tag{50}$$

$$\cos C = \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab}. \tag{51}$$

Estás fórmulas son útiles para hallar los ángulos de un triángulo conociendo sus lados.

---

* Como a y A, b y B, c y C representan *cualquier lado* de un triángulo y el *ángulo opuesto*, de cualquier fórmula que exprese una relación general entre estas partes se puede deducir otra fórmula *cambiando las letras en orden cíclico*. Así, en **(46)** cambiando a por b, b por c, c por a y A por B obtenemos **(47)**, y en **(47)**, cambiando b por c, c por a, a por b y B por C obtenemos **(48)**. Esto es una gran ayuda para aprenderse de memoria algunos grupos de fórmulas.

Las fórmulas **(46)** a **(48)** pueden usarse para hallar el tercer lado de un triángulo cuando se conocen dos lados y el ángulo que forman. Los otros ángulos pueden hallarse después ya sea por la ley de los senos o por las fórmulas **(49)** a **(51)**.

Ejemplo 1. Resolver un triángulo dados $A=47^\circ$, $b=8$, $c=10$.

Solución. Para hallar el lado a usemos **(46)**.

$$\begin{aligned} a^2 &= b^2+c^2-2bc\cos A \\ &= 64+100-2\times8\times10\times0{,}6820 \\ &= 54{,}88, \end{aligned}$$

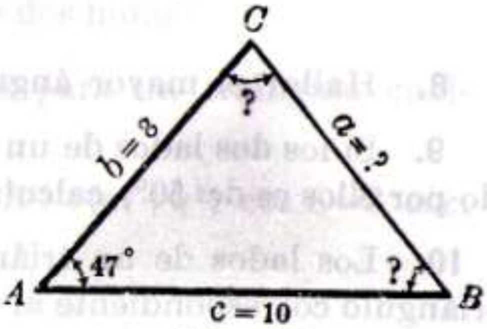


Fig. 87

de donde,

$$a = \sqrt{54{,}88} = 7{,}408.$$

Para hallar los ángulos C y B usemos la ley de los senos.

$$\operatorname{sen} B = \frac{b \operatorname{sen} A}{a} = \frac{8\times0{,}7314}{7{,}408} = 0{,}7898.$$

De donde, $B = 52^\circ\ 10'$.

$$\operatorname{sen} C = \frac{c \operatorname{sen} A}{a} = \frac{10\times0{,}7314}{7{,}408} = 0{,}9872.$$

De donde, $C = 80^\circ\ 50'$.

Comprobación. $A+B+C = 47^\circ+52^\circ\ 10'+80^\circ\ 50' = 180^\circ$.

Ejemplo 2. Resolver un triángulo, dados $a=7$, $b=3$, $c=5$.

Solución. Usando las fórmulas **(49)**, **(50)**, **(51)** para hallar los ángulos, obtenemos

$$\cos A = \frac{b^2+c^2-a^2}{2\,bc} = \frac{3^2+5^2-7^2}{2.3.5} = -\frac{1}{2} = -0{,}5000.$$

$$\cos B = \frac{a^2+c^2-b^2}{2\,ac} = \frac{7^2+5^2-3^2}{2.7.5} = \frac{13}{14} = 0{,}9286.$$

$$\cos C = \frac{a^2+b^2-c^2}{2\,ab} = \frac{7^2+3^2-5^2}{2.7.3} = \frac{11}{14} = 0{,}7857.$$

De donde, $A=120^\circ$, $B=21^\circ\ 47'$, $C=38^\circ\ 13'$.

Comprobación. $A+B+C=120^\circ+21^\circ\ 47'+38^\circ\ 13'= 180^\circ$.

PROBLEMAS

1. Dados $a=2$, $b=3$, $C=45°$; hallar c. *Solución.* 2,124.

2. Dados $b=8$, $c=5$, $A=60°$; hallar a, $\cos B$ y $\cos C$.

3. Dados $a=4$, $c=5$, $B=120°$; hallar b. *Solución.* 7,81.

4. Dados $a=24$, $b=16$, $C=44°$; hallar c.

5. Dados $b=10$, $c=11$, $A=133°$; hallar a. *Solución.* 19,26.

6. Dados $a=21$, $b=24$, $c=27$; resolver el triángulo.

7. Dados $a=2$, $b=3$, $c=4$; hallar el coseno del mayor ángulo. *Solución.* $-\frac{1}{4}$.

8. Hallar el mayor ángulo de un triángulo de lados 4, 7 y 10 cm.

9. Si los dos lados de un triángulo son 10 y 11 y el ángulo formado por ellos es de 50°, calcular el tercer lado. *Solución.* 8,921.

10. Los lados de un triángulo son 3, 8 y 9. Hallar la altura del triángulo correspondiente al vértice del ángulo más pequeño.

11. Las dos diagonales de un paralelogramo son 10 y 12 y forman un ángulo de 49° 18′; hállense los lados. *Solución.* 10 y 4,677.

12. Para calcular la distancia entre dos puntos A y B, separados por un estanque (fig. 88) se ha escogido una estación C y se han medido las distancias $CA = 426$ metros, $CB = 322,4$ metros, y el ángulo $ACB = 68°\ 42'$. ¿Cuál es la distancia AB?

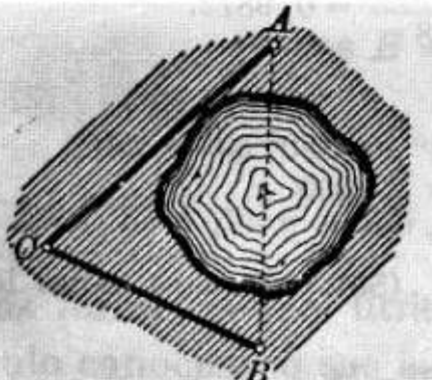


Fig. 88

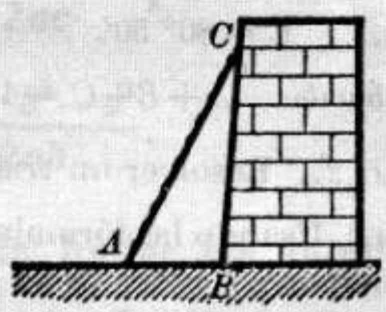


Fig. 89

13. Una escalera de 5,20 m de largo es colocada a 2 m de la base de un muro inclinado (fig. 89) y alcanza una altura de 4,60 m sobre dicho muro. Hállese la inclinación del muro. *Solución.* 95° 52′.

14. ¿Bajo qué ángulo se ve un objeto de 7 metros de largo por un observador cuyo ojo está a 5 metros de uno de los extremos del objeto y a 8 m del otro extremo?

15. Dos estaciones, A y B, situadas en lados opuestos de una montaña, son vistas desde una tercera estación C. Se conocen las distancias $AC = 11{,}5$ Km y $BC = 9{,}4$ Km, y el ángulo $ACB = 59° \, 30'$. Hallar la distancia entre A y B. *Solución.* 10,5 Km.

16. Dos navíos salen de un puerto al mismo tiempo. Uno navega en la dirección 62° 15′ al Este del Norte a la velocidad de 24 millas por hora; el otro navega en la dirección 18° 20′ al Oeste del Sur a la velocidad de 20 millas por hora. ¿A qué distancia estarán los navíos después de dos horas? ¿En qué dirección estará el navío más rápido con respecto al más lento después de las mismas dos horas?

17. Demostrar las siguientes igualdades para un triángulo cualquiera:

a. $a(b^2+c^2)\cos A + b(c^2+a^2)\cos B + c(a^2+b^2)\cos C = 3\,abc.$

b. $\dfrac{b+c}{a} = \dfrac{\cos B + \cos C}{1-\cos A}.$

c. $a+b+c = (b+c)\cos A + (c+a)\cos B + (a+b)\cos C.$

d. $\dfrac{\cos A}{a} + \dfrac{\cos B}{b} + \dfrac{\cos C}{c} = \dfrac{a^2+b^2+c^2}{2\,abc}.$

e. $a^2+b^2+c^2 = 2(ab\cos C + bc\cos A + ca\cos B).$

46. Funciones trigonométricas de los ángulos mitad de un triángulo en función de los lados. Las fórmulas **(49)** a **(51)** no son convenientes para el cálculo cuando a, b y c son números grandes. Estas pueden reemplazarse, como se demostrará en seguida, por otras fórmulas que contienen a los ángulos mitad de un triángulo. Primero vamos a demostrar el siguiente

Teorema. *Si* x *es un ángulo agudo o un ángulo obtuso,* * *entonces*

(1) $$\operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} x = \tfrac{1}{2}(1-\cos x),$$

(2) $$\cos^2 \tfrac{1}{2} x = \tfrac{1}{2}(1+\cos x).$$

* Estas relaciones son verdaderas para cualquier ángulo x, como se demostrará en el Capítulo VI.

Demostración. Consideremos las figuras 90 y 91. En la figura 90, x es un ángulo agudo. En la figura 91, x es un ángulo obtuso. El vértice O es el centro de un círculo trigonométrico, $(R=1)$. MP es perpendicular al diámetro horizontal BA. Entonces,

$$\angle ABP = \tfrac{1}{2}\, x.$$

[Por estar inscrito en el arco AP.]

También, $\qquad OM = \cos x. \qquad$ Por el Artículo 30

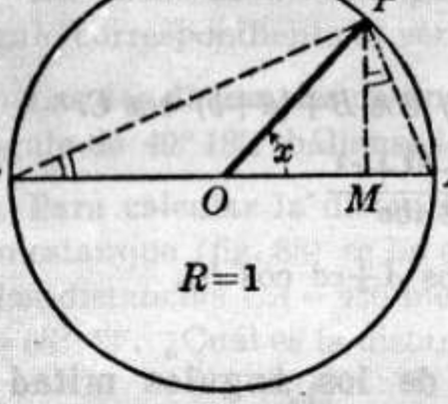


Fig. 90

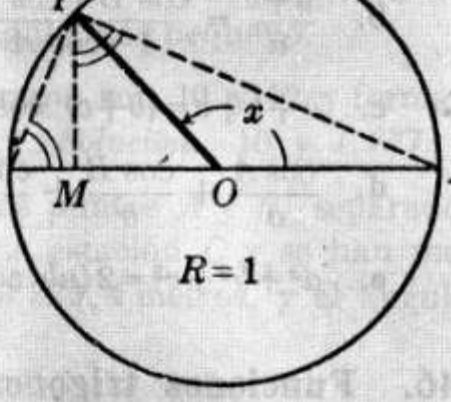


Fig. 91

Como los triángulos rectangulos ABP y MPA son semejantes, tendremos:

$$\angle ABP = \angle MPA = \tfrac{1}{2}\, x.$$

Por lo tanto,

$$(3) \qquad \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\, x = \frac{AP}{BA} = \frac{AP}{2} \quad \text{(en el triángulo } ABP\text{)}.$$

$$(4) \qquad \operatorname{sen} \tfrac{1}{2}\, x = \frac{MA}{AP} \quad \text{(en el triángulo } MPA\text{)}.$$

Multiplicando (3) y (4), resulta

$$(5) \qquad \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} x = \tfrac{1}{2} MA.$$

Sobre la recta BA se verifica que $MA = OA - OM = 1 - \cos x$, ya que los segmentos de recta están dirigidos (Art. 30). Por tanto,

$$(6) \qquad \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} x = \tfrac{1}{2} (1 - \cos x).$$

Y, finalmente, según **(18)** (Art. 17),

$$(7) \qquad \cos^2 \tfrac{1}{2} x = 1 - \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} x = \tfrac{1}{2} (1 + \cos x).$$

Para deducir ahora las fórmulas relativas a los ángulos mitad de un triángulo procederemos como sigue. Designemos a la mitad de la suma de los lados de un triángulo (es decir, a la mitad del perímetro) por s. Entonces,

$$(8) \qquad 2s = a + b + c.$$

Restando $2c$ a ambos miembros,

$$2s - 2c = a + b + c - 2c,$$

o sea,

$$(9) \qquad 2(s - c) = a + b - c.$$

Análogamente,

$$(10) \qquad 2(s - b) = a - b + c,$$

$$(11) \qquad 2(s - a) = -a + b + c.$$

En (1) y (2), reemplacemos x por A. Esto da

$$(12) \qquad 2 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} A = 1 - \cos A,$$

$$(13) \qquad 2 \cos^2 \tfrac{1}{2} A = 1 + \cos A.$$

Pero de **(49)** (Art. 45), $\cos A = \dfrac{b^2+c^2-a^2}{2\,bc}$; por tanto, (12) se convierte en

$$2 \operatorname{sen}^2 \tfrac{1}{2} A = 1 - \frac{b^2+c^2-a^2}{2\,bc}$$

$$= \frac{2\,bc-b^2-c^2+a^2}{2\,bc}$$

$$= \frac{a^2-(b^2-2\,bc+c^2)}{2\,bc}$$

$$= \frac{a^2-(b-c)^2}{2\,bc}$$

$$= \frac{(a+b-c)\,(a-b+c)}{2\,bc}$$

[Siendo $a^2-(b-c)^2$ el producto de la suma y diferencia de a y $b-c$.]

$$= \frac{2\,(s-c)\;2\,(s-b)}{2\,bc}. \qquad \text{Por (9), (10)}$$

De donde,

$$\textbf{(52)} \qquad \operatorname{sen} \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(s-b)\,(s-c)}{bc}}.$$

Análogamente, (13) se convierte en

$$2 \cos^2 \tfrac{1}{2} A = 1 + \frac{b^2+c^2-a^2}{2\,bc}$$

$$= \frac{2\,bc+b^2+c^2-a^2}{2\,bc}$$

$$= \frac{(b+c)^2-a^2}{2\,bc}$$

$$= \frac{(b+c+a)\,(b+c-a)}{2\,bc}$$

$$= \frac{2s \cdot 2\,(s-a)}{2\,bc}.$$

De donde,

(53) $$\cos \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}.$$

Como $\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A = \dfrac{\operatorname{sen} \tfrac{1}{2} A}{\cos \tfrac{1}{2} A}$, obtenemos, por sustitución, de **(52)** y **(53)**,

(54) $$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(s-b)(s-c)}{s(s-a)}}.$$

Como cualquier ángulo de un triángulo debe ser menor de 180°, $\tfrac{1}{2} A$ debe ser menor de 90° y todas las funciones de $\tfrac{1}{2} A$ deben ser positivas. Por esto solamente se han tomado los signos positivos de los radicales en **(52)**, **(53)** y **(54)**.

De manera semejante, podemos obtener:

$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{ac}};$$

$$\cos \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{s(s-b)}{ac}};$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} B = \sqrt{\frac{(s-a)(s-c)}{s(s-b)}};$$

$$\operatorname{sen} \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{ab}};$$

$$\cos \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}};$$

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)}{s(s-c)}}. \; *$$

* Se obtienen también permutando las letras en orden cíclico.

Según lo que acabamos de estudiar se dispone de tres fórmulas diferentes para hallar el valor de cada ángulo. Si la mitad del ángulo se aproxima mucho a 0°, la fórmula para el coseno no dará un resultado muy exacto, porque los cosenos de los ángulos cercanos a 0° difieren muy poco en valor. Y lo mismo se verifica para la fórmula del seno cuando la mitad del ángulo se aproxima mucho a 90°. Por tanto, en el primer caso se debe usar la fórmula del seno y en el segundo la del coseno. Sin embargo, en general, es de preferirse la fórmula de la tangente.

Cuando han sido encontrados dos ángulos, A y B por ejemplo, el tercer ángulo C puede encontrarse por la relación $A+B+C=180^\circ$; pero es mejor calcular todos los ángulos a partir de las fórmulas de manera que podamos usar la suma de los ángulos como una prueba de la exactitud de los resultados.

Se acostumbra usar una segunda forma de **(54)**, encontrada con o sigue:

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\frac{(s-b)\,(s-c)}{s\,(s-a)}}$$

$$= \sqrt{\frac{(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}{s\,(s-a)^2}}$$

[Esta última expresión se ha obtenido multiplicando numerador y denominador de la fracción que está bajo el radical por $s-a$.]

$$= \frac{1}{s-a}\sqrt{\frac{(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}{s}}$$

Designando la parte radical de la expresión por r,

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}{s}}, \tag{55}$$

y obtenemos

(56) $$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A = \frac{r}{s-a}.$$

Análogamente,

(57) $$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} B = \frac{r}{s-b},$$

(58) $$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C = \frac{r}{s-c}.$$

Geométricamente se puede demostrar que r de la fórmula **(55)** es el radio del círculo inscrito.

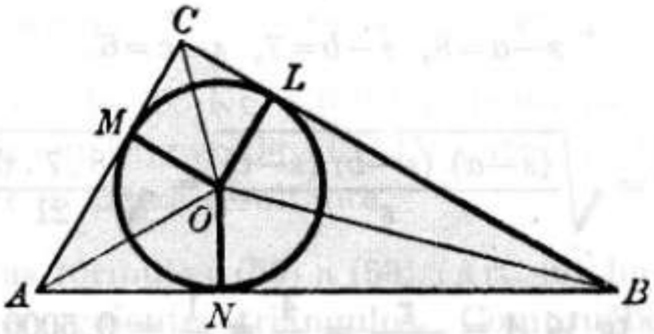


Fig. 92

Demostración. En la figura 92, ángulo $NAO = \tfrac{1}{2} A$,

(14) $$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A = \frac{NO}{AN}.$$

Si s representa la mitad del perímetro, tenemos

$$2s = AN + NB + BL + LC + CM + MA.$$

Pero $NB = BL$, $CM = LC$, $MA = AN$; por lo tanto,

$$2s = 2AN + 2BL + 2LC,$$

o sea, $$s = AN + (BL + LC) = AN + a.$$

Esto da $$AN = s - a.$$

Sustituyendo en (14), resulta

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A = \frac{NO}{s-a}.$$

Comparando este resultado con **(56)** y **(55)**, vemos que

$$NO = r = \sqrt{\frac{(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}{s}}.$$

Ejemplo. Resolver el triángulo cuyos lados son 13, 14 y 15.

Solución. Sea $a=13$, $b=14$, $c=15$.

Entonces, $$2s=a+b+c=42,$$

o sea, $$s = 21.$$

También, $$s-a=8,\ s-b=7,\ s-c=6.$$

De **(55)**, $$r=\sqrt{\frac{(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}{s}}=\sqrt{\frac{8\cdot7\cdot6}{21}}=\sqrt{16}=4.$$

De **(56)**, $$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A = \frac{r}{s-a} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2} = 0,5000,$$

de donde, $$\tfrac{1}{2} A = 26^\circ\ 34' \text{ y } A = 53^\circ\ 8'.$$

De **(57)**, $$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} B = \frac{r}{s-b} = \frac{4}{7} = 0,5714,$$

de donde, $$\tfrac{1}{2} B = 29^\circ\ 45' \text{ y } B = 59^\circ\ 30'.$$

De **(58)**, $$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C = \frac{r}{s-c} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3} = 0,6667,$$

de donde, $$\tfrac{1}{2} C = 33^\circ\ 41' \text{ y } C = 67^\circ\ 22'.$$

Comprobación. $A+B+C=53^\circ\ 8'+59^\circ\ 30'+67^\circ\ 22' = 180^\circ.$ *

---

* Un exceso o falta de 2′ en la suma de los ángulos no significa necesariamente que hay un error en los cálculos. En la interpolación se pueden originar pequeños errores.

PROBLEMAS

Empleando la ley de las tangentes, calcular en los triángulos siguientes los ángulos que faltan:

1. $a=94$, $b=56$, $C=29°$.

Solución. $A=119°\ 54'$, $B=31°\ 6'$, $c=52,57$.

2. $b=200$, $c=125$, $A=68°\ 18'$.

3. $a=100$, $c=130$, $B=51°\ 49'$.

Solución. $A=49°\ 4'$, $C=79°\ 7'$, $b=104$.

4. $a=42$, $b=92$, $C=112°\ 12'$.

5. Un faro está a 16 millas en la dirección $29°\ 20'$ al Este del Norte de una roca. Otro faro está a 12 millas en la dirección $72°\ 45'$ al Oeste del Sur de la misma roca. ¿En qué dirección está el primer faro con respecto al segundo? *Solución.* $47°\ 54'$ al Este del Norte.

6. Dos fuerzas de 400 Kg y 600 Kg de intensidad actúan sobre un cuerpo formando un ángulo de $112°\ 15'$ entre sí. Hállese la magnitud y la dirección de la fuerza resultante.

Empleando las fórmulas **(55)** a **(58)** (Art. 46) hallar los ángulos de cada uno de los siguientes triángulos. Compruébense los resultados obtenidos.

7. Dados $a=2$, $b=3$, $c=4$.

Solución. $A=28°\ 58'$, $B=46°\ 34'$, $C=104°\ 28'$.

8. Dados $a=4$, $b=7$, $c=10$.

9. Dados $a=21$, $b=24$, $c=27$.

Solución. $A=48°\ 12'$, $B=58°\ 24'$, $C=73°\ 24'$.

10. Si R y r son los radios de los círculos circunscrito e inscrito, respectivamente, demostrar las siguientes igualdades para cualquier triángulo:

a. $r = \dfrac{a \operatorname{sen} \frac{1}{2} B \operatorname{sen} \frac{1}{2} C}{\cos \frac{1}{2} A}$. **c.** $\dfrac{1}{bc} + \dfrac{1}{ca} + \dfrac{1}{ab} = \dfrac{1}{2Rr}$.

b. $R = \dfrac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$. **d.** $R = \dfrac{1}{2}\sqrt[3]{\dfrac{abc}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C}}$.

e. $abcr = 4R(s-a)(s-b)(s-c)$.

47. Fórmulas para hallar el área de un triángulo oblicuángulo.

CASO I. *Cuando se conocen dos lados y el ángulo que forman.*

Teorema. *El área de un triángulo es igual a la mitad del producto de dos de sus lados por el seno del ángulo que forman.*

Demostración. Supongamos que se conocen b, c y A. Tomemos c como la base. Designemos la altura por h y el área por S. Entonces, por Geometría,

$$S = \tfrac{1}{2}\, ch.$$

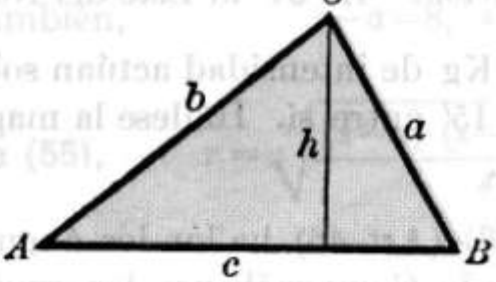


Fig. 93

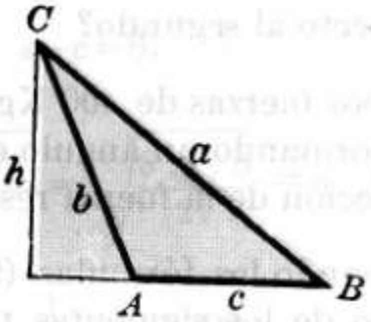


Fig. 94

Pero, de las figuras 93 y 94 se deduce: $h = b$ sen A; por tanto,

$$(59) \qquad S = \tfrac{1}{2}\, bc \text{ sen } A.$$

Análogamente,

$$S = \tfrac{1}{2}\, ac \text{ sen } B = \tfrac{1}{2}\, ab \text{ sen } C.$$

EJEMPLO 1. Hallar el área de un triángulo, teniendo como datos $b = 20$ cm, $c = 15$ cm, $A = 60°$.

Solución. Sustituyendo en (59),

$$S = \tfrac{1}{2}\, bc \text{ sen } A = \tfrac{1}{2} \times 20 \times 15 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 75\sqrt{3} \text{ cm}^2.$$

CASO II. *Cuando se conocen los tres lados.*

El triángulo ABC (fig. 92) es la suma de los tres triángulos OBC, OCA, OAB, cuyas áreas son, respectivamente, $\frac{1}{2}ar$, $\frac{1}{2}br$, $\frac{1}{2}cr$. Su suma es

$$S = \tfrac{1}{2}r(a+b+c) = rs.$$

Sustituyendo el valor de r dado por **(55)** (Art. 46), obtenemos

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}. \tag{60}$$

EJEMPLO 2. Sabiendo que $a = 13$, $b = 14$, $c = 15$, calcular el área.

Solución. $s = \frac{1}{2}(a+b+c) = 21$, $s-a = 8$, $s-b = 7$, $s-c = 6$.

Sustituyendo en **(60)**.

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{21 \times 8 \times 7 \times 6} = 84.$$

CASO III. *Ciertos problemas no incluídos directamente en los casos I y II pueden resolverse por el caso I, calculando primero un ángulo o lado adicional por la ley de los senos.*

EJEMPLO 3. Dados $a = 10\sqrt{3}$, $b = 10$, $A = 120°$; hallar el área del triángulo.

Solución. Por la ley de los senos,

$$\text{sen } B = \frac{b \text{ sen } A}{a} = \frac{10 \times \frac{1}{2}\sqrt{3}}{10\sqrt{3}} = \frac{1}{2}.$$

De donde, $B = 30°$ y $C = 180° - (A+B) = 30°$.

Ahora tenemos los dos lados, a y b, y el ángulo que forman, C. Por tanto,

$$S = \tfrac{1}{2}ab \text{ sen } C = \tfrac{1}{2} \times 10\sqrt{3} \times 10 \times \tfrac{1}{2} = 25\sqrt{3}.$$

PROBLEMAS

Hallar las áreas de los siguientes triángulos:

1. $b=8,\ c=5,\ A=60°$. *Solución.* 17,32.

2. $a=10,\ b=12,\ C=60°$.

3. $a=40,\ c=60,\ B=30°$. *Solución.* 600.

4. $a=7,\ c=5\sqrt{2},\ B=135°$.

5. $a=40,\ b=13,\ c=37$. *Solución.* 240.

6. $a=5,\ b=6,\ c=7$.

7. $a=409,\ b=169,\ c=510$. *Solución.* 30 600.

8. $b=149,\ A=70°\ 42',\ B=39°\ 18'$.

9. $c=8,\ B=100°\ 6',\ C=31°\ 6'$. *Solución.* 45,90.

10. $b=10,\ c=40,\ A=75°$.

11. $a=7,\ c=3,\ A=60°$. *Solución.* 10,39.

12. $a=140,5,\ b=170,6,\ A=40°$.

13. Demostrar que si en un triángulo se conocen un lado y sus dos ángulos adyacentes, el área de dicho triángulo está dada por una de las fórmulas:

$$S=\frac{a^2 \text{ sen } B \text{ sen } C}{2 \text{ sen }(B+C)},\quad S=\frac{b^2 \text{ sen } A \text{ sen } C}{2 \text{ sen }(A+C)} \quad \text{o} \quad S=\frac{c^2 \text{ sen } A \text{ sen } B}{2 \text{ sen }(A+B)}.$$

14. Demostrar que el área de un paralelogramo es igual al producto de dos lados adyacentes cualesquiera multiplicado por el seno del ángulo que forman.

15. Hallar una fórmula para el área de un trapecio isósceles en función de los lados paralelos y un ángulo agudo.

16. Demostrar que el área de un cuadrilátero es igual a la mitad del producto de sus diagonales por el seno del ángulo que forman.

17. La base de un triángulo isósceles es 20 y su área es $100 : \sqrt{3}$; hallar sus ángulos. *Solución.* 30°, 30°, 120°.

18. Demostrar que el área de un triángulo cualquiera está dada por cada una de las siguientes fórmulas:

a. $S = \frac{1}{2} a^2 \text{ sen } B \text{ sen } C \csc A.$

b. $S = \dfrac{abc}{4R}.$

c. $S = Rr (\text{sen } A + \text{sen } B + \text{sen } C).$

d. $S = \dfrac{2\,abc}{a+b+c} (\cos \frac{1}{2} A \cos \frac{1}{2} B \cos \frac{1}{2} C).$

48. Nota final. En este capítulo los cálculos se han hecho usando las tablas IV y V (valores naturales de las funciones). Como dijimos en el Artículo 36, se obtienen cuatro cifras exactas en los resultados. En el siguiente capítulo los cálculos se harán por logaritmos, usando tablas de cuatro cifras. Los resultados se hallarán automáticamente con cuatro cifras exactas y se evitará mucho trabajo inútil.

CAPITULO V

TEORIA Y USO DE LOS LOGARITMOS

49. Necesidad de los logaritmos * en la Trigonometría. Muchos de los problemas que se presentan en la Trigonometría implican largos cálculos. Como el trabajo relacionado con ellos puede aminorarse grandemente con el uso de los logaritmos, resulta ventajoso usarlos en una gran parte de los cálculos trigonométricos. Esto es especialmente cierto en los cálculos relacionados con la solución de los triángulos. A continuación vamos a dar los principios fundamentales de los logaritmos y a explicar el uso de las tablas de logaritmos.

Definición de logaritmo. *Se llama logaritmo de un número en una base dada al exponente de la potencia a que debe elevarse la base para obtener el número.*

Así, si

(*A*) $$b^x = N,$$ (*forma exponencial*)

entonces x *es el logaritmo de* N *de base* b. Este enunciado se escribe en forma abreviada como sique:

(*B*) $$x = \log_b N.$$ (*forma logarítmica*)

(*A*) y (*B*) son entonces simplemente dos maneras diferentes de expresar la misma relación entre b, x, y N.

---

* Los logaritmos fueron inventados por John Napier (1550-1617), Barón de Merchiston, en Escocia, y descritos por él en 1614.

(A) se llama *forma exponencial.*

(B) se llama *forma logarítmica.*

El hecho de que un logaritmo sea un exponente puede expresarse más claramente escribiendo (A) en la forma

$$(\text{base})^{\log} = \text{número}.$$

Por ejemplo, las siguientes relaciones expresadas en forma exponencial,

$$3^2 = 9, \quad 2^5 = 32, \quad (\tfrac{1}{2})^3 = \tfrac{1}{8}, \quad x^y = z,$$

se escriben, respectivamente, en la forma logarítmica

$$2 = \log_3 9, \quad 5 = \log_2 32, \quad 3 = \log_{\frac{1}{2}} \tfrac{1}{8}, \quad y = \log_x z;$$

en donde,

$2, \ 5, \ 3, \ y$ son los logaritmos (exponentes),

$3, \ 2, \ \frac{1}{2}, \ x$ son las bases, y

$9, 32, \ \frac{1}{8}, \ z$ son los números, respectivamente.

De manera semejante, las igualdades

$$25^{\frac{1}{2}} = \sqrt{25} = 5; \qquad 10^{-3} = \frac{1}{10^3} = \frac{1}{1000} = 0{,}001,$$

$$8^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{8^2} = \sqrt[3]{64} = 4, \qquad b^0 = \frac{b^n}{b^n} = 1$$

se escriben en forma logarítmica como sigue:

$$\tfrac{1}{2} = \log_{25} 5, \quad -3 = \log_{10} 0{;}001, \quad \tfrac{2}{3} = \log_8 4, \quad 0 = \log_b 1.$$

EJEMPLO. ¿Cuál es el logaritmo de 27 de base 9?

Solución. Sea $x = \log_9 27.$

Entonces, $9^x = 27,$

o sea, $3^{2x} = 3^3.$

Por tanto, $2x = 3$

y $x = \frac{3}{2}.$

PROBLEMAS

Expresar las siguientes igualdades en forma logarítmica:

1. $5^2=25$. *Solución.* $\log_5 25=2$.
2. $10^3=1\,000$.
3. $3^4=81$.
4. $(1/3)^2=1/9$.
5. $\sqrt{9}=3$.
6. $2^{-4}=1/16$.
7. $\sqrt[3]{125}=5$.
8. $10^{-2}=0,01$.
9. $(0,01)^2=0,0001$.
10. $a^0=1$.
11. $p^s=q$.
12. $y=4^{2x}$.

Expresar las siguientes igualdades en forma exponencial:

13. $\log_4 64=3$. *Solución.* $4^3=64$.
14. $\log_7 49=2$.
15. $\log_6$ [illegible] $=3$.
16. $\log_{10} 0,0001=-4$.
17. $\log_4 2=1/2$.
18. $\log_a a=1$.
19. $\log_a 1=0$.
20. $\log_b a=c$.

21. Cuando la base es 2, ¿cuáles son los logaritmos de los números 1, 2, $1/2$, 4, $1/4$, 8, 64, 128?

22. Cuando la base es 5, ¿cuáles son los logaritmos de los números 1, 5, 25, 125, $1/5$, $1/25$, $1/625$?

23. Para la base 10, ¿cuáles son los logaritmos de los números 1, 10, 100, 1 000, 10 000, 0,1, 0,01, 0,001, 0,0001?

24. Para la base 4 los logaritmos de ciertos números son 0, 1, 2, 3, -1, -2, $1/2$, ¿cuáles son los números?

Hallar el valor de x en cada una de las siguientes ecuaciones:

25. $x=\log_3 9$. *Solución.* 2.
26. $x=\log_3 1/9$.
27. $x=\log_8 16$. *Solución.* $4/3$.
28. $x=\log_{100} 1\,000$.
29. $x=\log_{10}\sqrt{10}$. *Solución.* $1/2$.
30. $x=\log_4 \sqrt[3]{16}$.
31. $\log_2 x=3$. *Solución.* 8.
32. $\log_3 x=-3$.

33. $2 \log_{25} x = -3$. *Solución.* $\frac{1}{125}$. **34.** $3 \log_8 x = -4$.

35. $\log_x 16 = 2$. *Solución.* ± 4. **36.** $\log_x 0{,}001 = -3$.

37. $\log_x 6\frac{1}{4} = -2$. *Solución.* $\pm \frac{2}{5}$. **38.** $\log_x 10\sqrt[3]{10} = \frac{4}{3}$.

Verificar los siguientes enunciados:

39. $\log_{10} 1\,000 + \log_{10} 100 + \log_{10} 10 + \log_{10} 1 = 6$.

40. $\log_{10} 0{,}001 - \log_{10} 0{,}01 + \log_{10} 0{,}1 = -2$.

41. $2 \log_a a + 2 \log_a \dfrac{1}{a} + \log_a 1 = 0$.

42. $3 \log_{27} 3 - \frac{1}{3} \log_3 27 + \log_9 3 = \frac{1}{2}$.

43. $4 \log_2 \sqrt{0{,}125} + 6 \log_{10} \dfrac{\sqrt{10}}{10} = -9$.

44. $a^{\log_a x} = x$.

45. $\log_a a^x = x$.

50. Teoremas sobre los logaritmos. Como un logaritmo es simplemente un nuevo nombre dado al exponente, es evidente que las propiedades de los logaritmos deben hallarse a partir de las leyes del Algebra que rigen a los exponentes.

Teorema I. *El logaritmo del* ***producto*** *de dos factores es igual a la* ***suma*** *de los logaritmos de los dos factores.*

Demostración. Sean M y N los factores y x e y sus logaritmos en la misma base b. Entonces:

$$(A) \qquad \log_b M = x \ \text{ y } \ \log_b N = y.$$

Escribiendo estas igualdades en la forma exponencial,

$$(B) \qquad b^x = M \ \text{ y } \ b^y = N.$$

Multiplicando miembro a miembro las igualdades (B),

$$b^{x+y} = MN.$$

Escribiendo esta igualdad en forma logarítmica queda

$$\log_b MN = x + y = \log_b M + \log_b N. \qquad \text{De (A)}$$

Por aplicaciones sucesivas, este teorema se puede extender evidentemente al producto de un número cualquiera de factores. Así,

$$\begin{aligned} \log_b MNPQ = \log_b M \cdot NPQ &= \log_b M + \log_b NPQ \qquad \text{Teorema I} \\ &= \log_b M + \log_b N + \log_b PQ \\ &= \log_b M + \log_b N + \log_b P + \log_b Q. \end{aligned}$$

Teorema II. *El logaritmo del* ***cociente*** *de dos números es igual al logaritmo del dividendo* ***menos*** *el logaritmo del divisor.*

Demostración. Como en el Teorema I, sean

$$(A) \qquad \log_b M = x \ \text{ y } \ \log_b N = y.$$

Pasando a la forma exponencial,

$$(B) \qquad b^x = M \ \text{ y } \ b^y = N.$$

Dividiendo miembro a miembro las igualdades (B), obtenemos

$$b^{x-y} = \frac{M}{N}.$$

Pasando esta expresión a la forma logarítmica, resulta

$$\log_b \frac{M}{N} = x - y = \log_b M - \log_b N. \qquad \text{De } (A)$$

Teorema III. *El logaritmo de la* ***potencia de exponente*** **p** *de un número es igual a* **p** ***veces*** *el logaritmo del número.*

Demostración. Sea $\log_b N = x$.

Entonces, $\qquad b^x = N.$

Elevando ambos miembros a la potencia p,

$$b^{px} = N^p.$$

Escribiendo esto en la forma logarítmica, resulta

$$\log_b N^p = px = p \log_b N.$$

Teorema IV. *El logaritmo de la* ***raíz de índice*** r *de un número es igual al logaritmo del número* ***dividido por*** r.

Demostración. Sea $\log_b N = x$.

Entonces $b^x = N$.

Extrayendo raíz de índice r a ambos miembros,

$$b^{\frac{x}{r}} = N^{\frac{1}{r}}.$$

Escribiendo esta igualdad en la forma logarítmica, queda

$$\log_b N^{\frac{1}{r}} = \frac{x}{r} = \frac{\log_b N}{r} = \frac{1}{r} \log_b N.$$

De los cuatro teoremas anteriores se deduce que si usamos los logaritmos de los números en vez de los números mismos, entonces las operaciones de *multiplicación*, *división*, *elevación a potencias* y *extracción de raíces* se reducen a las de *suma*, *resta*, *multiplicación* y *división*, respectivamente.

EJEMPLO 1. Hallar el valor de $\log_{10} \sqrt{0{,}001}$.

Solución. $\log_{10} \sqrt{0{,}001} = \frac{1}{2} \log_{10} 0{,}001$ Teorema IV

$$= \tfrac{1}{2} \log_{10} \tfrac{1}{1000} = \tfrac{1}{2}(-3) = -\tfrac{3}{2}.$$

EJEMPLO 2. Escribir $\log_b \sqrt[3]{\dfrac{27 \times 0{,}235 \times 7{,}63}{63{,}2 \times 7{,}86}}$ en forma desarrollada.

Solución.

$$\log_b \sqrt[3]{\frac{27\times 0,235\times 7,63}{63,2\times 7,86}} = \frac{1}{3}\log_b \frac{27\times 0,235\times 7,63}{63,2\times 7,86}$$

$$= \tfrac{1}{3}[\log_b (27\times 0,235\times 7,63) - \log_b (63,2\times 7.86)]$$

$$= \tfrac{1}{3}\,[\log_b 27 + \log_b 0,235 + \log_b 7,63 - (\log_b 63,2 + \log_b 7,86)\,].$$

PROBLEMAS

Hallar el valor de cada una de las siguientes expresiones:

1. $\log_{10}\sqrt{1\,000} + \log_{10}\sqrt{0,01}$. *Solución.* $\frac{1}{2}$.
2. $\log_{10}(0,1)^4 - \log_{10}\sqrt[3]{0,001}$.
3. $\log_{10}\sqrt{\frac{1}{10}} + \log_{10}\sqrt{10}$. *Solución.* 0.
4. $\log_{10}\sqrt[3]{100} - \log_{10}(0,01)^2$.
5. $\log_2\sqrt{8} + \log_3(\frac{1}{3})^2$. *Solución.* $-\frac{1}{2}$.
6. $\log_2(0,5)^3 - \log_4\sqrt[3]{16}$.
7. $\log_5\sqrt{125} + \log_{11}\sqrt[3]{121}$. *Solución.* $\frac{13}{6}$.
8. $\log_8(2)^5 + \log_7(\frac{1}{49})^{\frac{1}{3}}$.

Escribir las siguientes expresiones logarítmicas en forma desarrollada:

9. $\log_{10}\frac{4,12\times 7,34}{6,28}$.
10. $\log_{10}\sqrt{\frac{6,72}{93,1\times 0,065}}$.
11. $\log_m\sqrt{\frac{s(s-b)(s-c)}{s-a}}$.
12. $\log_m\frac{ab\,\operatorname{sen} C}{z}$.
13. $\log_{10}P(1+r)^n$.
14. $\log_{10}\frac{a^3 b^2 c^{\frac{1}{2}}}{4\sqrt[3]{d}}$.

Escribir las siguientes expresiones logarítmicas en forma abreviada:

15. $2\log x + \frac{1}{2}\log y - 3\log z$.
16. $\frac{5}{3}\log(x-1) - \frac{2}{3}\log x - \frac{1}{6}\log(x+2) + \log c$.
17. $\log y - \frac{1}{2}\log(y^2+4) + \log c$.
18. $\frac{1}{3}[2\log(x-1) + 3\log(x+1) + \frac{1}{2}\log x - \frac{2}{3}\log(x^2+1)]$.

51. Logaritmos comunes.* Cualquier número positivo, excepto la unidad, puede tomarse como base, y a cada base particular escogida corresponde un conjunto o sistema de logaritmos. En los logaritmos comunes, llamados también vulgares o decimales, la base es 10, y son los más convenientes de usar en nuestro sistema de numeración decimal. En lo que sigue, cuando no se especifique la base, se debe tomar como 10. Así, $\log_{10} 100 = 2$ se escribe

$$\log 100 = 2, \text{ etc.}$$

El logaritmo común de un número dado es, por consiguiente, la respuesta a la pregunta

¿Qué potencia de 10 será igual al número dado?

La siguiente tabla indica qué números tienen por logaritmos números enteros en el sistema decimal.

	Forma exponencial		Forma logarítmica
Como	$10^4 = 10\,000$	tenemos	$\log 10\,000 = 4$
	$10^3 = 1\,000$		$\log 1\,000 = 3$
	$10^2 = 100$		$\log 100 = 2$
	$10^1 = 10$		$\log 10 = 1$
	$10^0 = 1$		$\log 1 = 0$
	$10^{-1} = 0{,}1$		$\log 0{,}1 = -1$
	$10^{-2} = 0{,}01$		$\log 0{,}01 = -2$
	$10^{-3} = 0{,}001$		$\log 0{,}001 = -3$
	$10^{-4} = 0{,}0001$		$\log 0{,}0001 = -4$
	etc.		etc.

* También llamado sistema de Briggs, inventado por Henry Briggs (1561-1630), profesor del Gresham College, Londres, y más tarde en Oxford. Modificó el invento de los logaritmos de manera que resultara conveniente para el uso práctico.

Suponiendo que cuando un número crece su logaritmo también crece, vemos que un número comprendido entre 100 y 1 000 tiene un logaritmo comprendido entre **2** y **3**. Análogamente, el logaritmo de un número comprendido entre **0,1** y **0,01** tiene un logaritmo comprendido entre -1 y -2. En resumen, el logaritmo de cualquier número que no sea una potencia exacta de **10** consta, en general, de una parte *entera* y una parte *decimal*.

Así, por ejemplo, como 4 587 es un número comprendido entre 10^3 y 10^4, tenemos

$$\log 4\,587 = 3 + \text{una parte decimal.}$$

De la misma manera, como **0,0067** es un número comprendido entre 10^{-3} y 10^{-2},

$$\begin{aligned}\log 0{,}0067 &= -(2 + \text{una parte decimal})\\ &= -2 - \text{una parte decimal.}\end{aligned}$$

Por razones prácticas el logaritmo de un número se escribe siempre en tal forma que la parte decimal sea positiva. Cuando el logaritmo completo es negativo, la parte decimal puede hacerse positiva sumándole una unidad. Entonces, para no alterar el valor del logaritmo, agregamos una unidad negativa a la parte entera. Así, en el último ejemplo,

$$\begin{aligned}\log 0{,}0067 &= (-2) + (-\text{una fracción decimal})\\ &= (-1-2) + (1 - \text{una fracción decimal})\\ &= -3 + \text{una nueva parte decimal.}\end{aligned}$$

Para hacer resaltar el hecho de que la parte entera de un logaritmo es negativa, se escribe usualmente el signo menos encima de dicha parte entera.

Por ejemplo,

$$\begin{aligned}\log 0{,}004712 &= -2{,}3268\\ &= -2-0{,}3268\\ &= (-1-2)+(1-0{,}3268)\\ &= \overline{3}{,}6732.\end{aligned}$$

La parte entera de un logaritmo se llama *característica* del logaritmo.

La parte decimal de un logaritmo se llama *mantisa* del logaritmo.

Así, si $\log 357 = 2{,}5527$ y $\log 0{,}004712 = \overline{3}{,}6732$, las partes enteras 2 y -3 son las características y 0,5527 y 0,6732 las mantisas.

De las explicaciones dadas y de la tabla de la página 167 obtenemos reglas que se dan en el artículo siguiente.

52. Reglas para determinar la característica de un logaritmo común.

La característica del logaritmo de un número mayor que la unidad es positiva e igual a una unidad menor que el número de cifras que tiene el número a la izquierda de la coma decimal.

La característica del logaritmo de un número menor que la unidad es negativa e igual a una unidad mayor numéricamente que el número de ceros comprendidos entre la coma decimal y la primera cifra significativa del número.

Ejemplo 1. Las características de los logaritmos de los números 27 683, 456,2, 9,67, 436 000, 26, 0,04, 0,0000612, 0,7963, 0,8 y 0,0012 son 4, 2, 0, 5, 1, -2, -5, -1, -1, -3.

Teorema V. *Los números que difieren solamente en la posición de la coma decimal tienen la misma mantisa.*

Demostración. Consideremos, por ejemplo, los números 54,37 y 5 437.

Sea $$10^x = 54,37.$$

Si multiplicamos ambos miembros de esta ecuación por $100(=10^2)$, tenemos

$$10^2 \cdot 10^x = 10^{x+2} = 5437,$$

o sea,

$$x+2=\log 5\,437.$$

Por tanto, el logaritmo de uno de los números difiere del logaritmo del otro solamente en su parte entera (característica).

Así, si $$\log 47\,120 = 4,6732,$$

entonces, $$\log 47,12 = 1,6732,$$

y $$\log 0,004712 = \overline{3},6732.$$

Como la mantisa es siempre positiva, es deseable en algunos cálculos sumar y restar de la característica los mismos múltiplos de 10. Así, $\overline{2},3416$ puede escribirse en la forma $8,3416-10$. En este caso se sumaron y restaron 10 a la característica -2. Los siguientes ejemplos harán ver la ventaja de escribir las características en esta forma.

EJEMPLO 2. Sumar los logaritmos $\overline{2},4069$ y $\overline{1},9842$.

Sumando y restando 10, escribimos

$$\begin{array}{r} 8,4069-10 \\ 9,8842-10 \\ \hline 18,3911-20 \end{array}$$

o sea, $$\overline{2},3911.$$

EJEMPLO 3. Restar $\overline{3},4492$ de $2,1163$.

Escribimos

$$\begin{array}{r} 12,1163-10 \\ 7,4492-10 \\ \hline 4,6671. \end{array}$$

Ejemplo 4. Multiplicar $\bar{2},7012$ por 3.

$$\begin{array}{r} 8,7012-10 \\ 3 \\ \hline 26,1036-30 \end{array}$$

o sea, $\bar{4},1036$.

Ejemplo 5. Dividir $\bar{2},2411$ por 3.

Aquí primero sumamos y después restamos 30.

$$3\,)\,\underline{28,2411-30}$$
$$9,4137-10$$

o sea, $\bar{1},4137$.

PROBLEMAS

Dados log 62,63 = 1,7968 y log 7 194 = 3,8569, hallar los logaritmos de los siguientes números:

1. 6 263. *Solución.* 3,7968. **2.** 7,194.

3. 0,006263. *Solución.* $\bar{3},7968$. **4.** 62 630.

5. 0,7194. *Solución.* $\bar{1},8569$. **6.** $626,3\times 71,94$.

7. $(6,263)^2$. *Solución.* 1,5936. **8.** $\sqrt{719,4}$.

9. $0,06263\sqrt[3]{7,194}$. *Solución.* $\bar{1},0824$. **10.** $\sqrt{\dfrac{71\,940}{62,63}}$.

Dados log 5,664 = 0,7531 y log 0,7182 = $\bar{1}$,8562, hallar los números que corresponden a los siguientes logaritmos:

11. 1,7531. *Solución.* 56,64. **12.** 2,8562.

13. 8,7531−10. *Solución.* 0,05664. **14.** $\bar{1},7531$.

15. 5,8562. *Solución.* 718 200. **16.** 7,7531−10.

17. 9,8562−10. *Solución.* 0,7182. **18.** 3,8562.

Dados $\log 2 = 0,3010$ y $\log 3 = 0,4771$, hallar los valores de los siguientes logaritmos:

19. $\log 8$.	*Solución.*	$0,9030$.	**20.**	$\log 27$.
21. $\log 6$.	*Solución.*	$0,7781$.	**22.**	$\log 48$.
23. $\log 2\sqrt{3}$.	*Solución.*	$0,5396$.	**24.**	$\log \frac{3\sqrt{6}}{2}$.
25. $\log \sqrt{0,125}$.	*Solución.*	$9,5485-10$.	**26.**	$\log \sqrt[3]{1,5}$.
27. $\log 2\,000\sqrt{30}$.	*Solución.*	$4,0396$.	**28.**	$\log \frac{\sqrt{0,03}}{40}$.

53. Tablas de logaritmos. El sistema de logaritmos que tiene por base 10 es el usado en los cálculos corrientes. Para conveniencia del calculista los logaritmos comunes han sido calculados hasta cierto número de cifras exactas y ordenados en forma de tablas llamadas tablas logarítmicas. Los logaritmos decimales tienen dos grandes ventajas.

1. *La característica del logaritmo de un número puede escribirse directamente siguiendo las reglas del Artículo 52.*

Es por esto que, generalmente, solamente figuran en las tablas las mantisas de los logaritmos.

2. *Los logaritmos de los números que solamente difieren en la posición de la coma decimal tienen la misma mantisa (Teorema V, Art. 52).*

Por tanto, como un cambio en la posición de la coma decimal en un número afecta solamente a la característica, es suficiente tabular las mantisas * de logaritmos de números enteros. Así,

$$\log 3\,104 = 3,4920 \qquad \log 31,04 = 1,4920,$$
$$\log 0,03104 = \bar{2},4920, \qquad \log 310\,400 = 5,4920;$$

en suma, un número cualquiera que tenga 3 104 por parte significativa tendrá 0,4920 por mantisa de su logaritmo.

---

* Es costumbre no poner en las tablas la coma decimal que corresponde a cada mantisa.

54. Cómo encontrar el logaritmo de un número dado. Las dos primeras páginas de la tabla I * dan directamente las mantisas de los logaritmos de todos los números cuya primera cifra significativa sea 1 y cuya parte significativa consta de cuatro o menos cifras, y en las otras dos páginas se encuentran las mantisas de los logaritmos de todos los números cuya primera cifra significativa sea mayor que 1 y cuya parte significativa consta de tres o menos cifras. Por comodidad de impresión se han suprimido el cero y la coma decimal, que deben sobrentenderse.

Los siguientes ejemplos enseñan el procedimiento para encontrar los logaritmos de números para los cuales las mantisas están dadas directamente en las tablas.

En todos los casos la característica se determina por la posición de la coma decimal de acuerdo con las reglas del Artículo 52.

Ejemplo 1. Hallar el logaritmo de 1387.

Solución. Por la regla del Artículo 52 vemos que la característica es +3.

En la tabla buscamos 138 en la columna *No.* La mantisa se encontrará en la misma fila que 138 y en la columna encabezada con el número 7. Vemos que es 1421, que significa 0,1421.

Por lo tanto, $\log 1\,387 = 3,1421.$

Ejemplo 2. Hallar log 17.

Solución. La característica es 1.

Para hallar la mantisa de 17 busquemos la mantisa de 1700. En la tabla se busca 170 en la columna *No.* La mantisa se encuentra en la misma fila que 170 y en la columna vertical encabezada con 0. Esto da la mantisa 2304, que significa 0,2304.

Por lo tanto, $\log 17 = 1,2304.$

---

* Las tablas a que nos referimos son las que van al final del libro,

EJEMPLO 3. Hallar log 0,00152.

Solución. La característica es -3, es decir, negativa y una unidad mayor numéricamente que el número de ceros (dos) que siguen a la coma decimal.

Busquemos 152 en la columna *No.* En la misma fila que 152 y en la columna vertical encabezada por 0 hallamos la mantisa buscada, 1818, que representa 0,1818.

Por lo tanto, $\log 0,00152 = \bar{3},1818 = 7,1818-10.$

EJEMPLO 4. Hallar log 5,63.

Solución. La característica es cero.

Buscamos 56 en la columna *No.* En la misma filá que 56 y en la columna que tiene el 3 en la parte superior hallamos la mantisa buscada, 0,7505.

Por lo tanto, $\log 5,63 = 0,7505.$

EJEMPLO 5. Hallar log 0,08.

Solución. La característica es -2.

Usando 800, hallamos que la mantisa es 0,9031.

Por lo tanto, $\log 0,08 = \bar{2},9031 = 8,9031-10.$

PROBLEMAS

Hallar los logaritmos de los siguientes números:

1. 1 872.	*Solución.* 3,2723.	**2.** 5.	
3. 0,7.	*Solución.* $\bar{1}$,8451.	**4.** 20 000.	
5. 1,808.	*Solución.* 0,2572.	**6.** 0,000032.	
7. 0,01011.	*Solución.* $\bar{2}$,0048.	**8.** 9,95.	
9. 17,35.	*Solución.* 1,2393.	**10.** 0,1289.	
11. 2500.	*Solución.* 3,3979.	**12.** 1,002.	

Cuando la primera cifra significativa de un número es 1 y el número de cifras de su parte significativa es mayor que 4, la mantisa de su logaritmo no puede hallarse en la tabla I, ni tampoco puede hallarse la mantisa correspondiente al logaritmo de un número cuando su primera cifra significativa es mayor que 1 y el número de cifras de su parte significativa es mayor que 3.

Por *interpolación,** sin embargo, podemos hallar la mantisa, en el primer caso, de un número que tenga una quinta cifra significativa, y en el segundo caso, de un número que tenga una cuarta cifra significativa. En este libro no se hace ningún intento para hallar los logaritmos de números de más cifras significativas, ya que nuestras tablas de cuatro cifras no permiten aproximación para esos casos.

A continuación veremos el proceso de interpolación por medio de ejemplos.

EJEMPLO 6. Hallar log 2 445.

Solución. Por la regla del Artículo 52, la característica es 3. La mantisa no se encuentra en nuestra tabla. Pero tenemos:

$$\log 2\,450 = 3,3892$$

y

$$\log 2\,440 = 3,3874$$

$$\text{Diferencia de logaritmos} = 0,0018$$

Como 2 445 está comprendido entre 2 440 y 2450, es claro que su logaritmo debe estar comprendido entre 3,3874 y 3,3892. Como 2 445 está precisamente a la mitad entre 2440 y 2450 supondremos que su logaritmo está también a la mitad entre los dos logaritmos. ** Tomamos entonces la mitad (o sea, 0,5) de su diferencia, 0,0018 (llama-

* En los Artículos 38-39 se aplicó la interpolación en el caso de las funciones trigonométricas.

** En este proceso de interpolación hemos supuesto y usado el principio de que el incremento de un logaritmo es proporcional al incremento del número. Este principio no es estrictamente verdadero, y su aplicación aumenta en muchos casos el error de las tablas, el cual para las mantisas dadas es menor, en valor absoluto, que 0,00005 Sin embargo, el error final en cualquier caso será menor, en valor absoluto, que 0,0001.

da diferencia tabular), y sumamos esta mitad a $\log 2440 = 3,3874$ Esto da

$$\log 2445 = 3,3874+0,5\times 0,0018 = 3,3883.$$

Si tuviéramos que hallar $\log 2442$, tomaríamos no la mitad de la diferencia entre los logaritmos de 2440 y 2450, sino 0,2 de ella, ya que si a un aumento de 10 unidades en el número 2440 le corresponde un aumento de 0,0018 en el logaritmo, a un aumento de 2 unidades le corresponderá un aumento de dos décimas de esta diferencia.

De esta manera:

$$\log 2\,442 = 3,3874+0,2\times 0,0018 = 3,3874+0,0004 = 3,3878.$$

Para ahorrar trabajo en la interpolación, al buscar los logaritmos de números cuyas mantisas no se encuentran en la tabla, cada diferencia tabular que aparece en la tabla ha sido multiplicada por 0,1, 0,2, 0,3, ..., 0,9, e impresas en la columna de la derecha encabezada con el nombre de "Partes proporcionales". Así, en la tercera página de la tabla I, la primera sección de la columna de partes proporcionales, muestra los productos obtenidos al multiplicar las diferencias tabulares 22 y 21 por 0,1, 0,2, 0,3, ..., 0.9. Así,

Cifra adicional	Diferencia 22	Diferencia 21
1	2,2	2,1
2	4,4	4,2
3	6,6	6,3
4	8,8	8,4
5	11,0	10,5
6	13,2	12,6
7	15,4	14,7
8	17,6	16,8
9	19,8	18,9

$$0,1\times 22 = 2,2 \qquad 0,1\times 21 = 2,1$$
$$0,2\times 22 = 4,4 \qquad 0,2\times 21 = 4,2$$
$$0,3\times 22 = 6,6 \qquad 0,3\times 21 = 6,3$$
$$0,4\times 22 = 8,8 \qquad 0,4\times 21 = 8,4$$
$$0,5\times 22 = 11,0 \qquad 0,5\times 21 = 10,5$$

etc. etc.

EJEMPLO 7. **Hallar** $\log 28,64$.

Solución. Como la mantisa de 2864 no se halla en nuestra tabla, debemos interpolar.

$$\log 28,60 = 1,4564$$
$$\log 28,70 = 1,4579$$
$$\text{Diferencia tabular} = \quad 15$$

Se busca la tablilla de partes proporcionales correspondientes a la diferencia tabular 15. Debajo de 15 y enfrente de la cuarta cifra adicional 4 de nuestro número hallamos 6,0. Entonces:

$$\begin{array}{rl} \log 28,60 = 1,4564 & \\ \underline{\qquad\quad 6} & \text{Parte proporcional} \\ \log 28,64 = 1,4570. & \end{array}$$

Ejemplo 8. Hallar log 0,12548

Solución. Como la mantisa de 12548 no se encuentra en nuestra tabla, interpolamos,

$$\begin{array}{rl} \log 0,12540 = & \bar{1},0983 \\ \log 0,12550 = & \underline{\bar{1},0986} \\ \text{Diferencia tabular} = & \qquad 3. \end{array}$$

Se busca la tablilla de partes proporcionales correspondientes a la diferencia tabular 3. Debajo de 3 y frente a la cifra adicional 8 hallamos 2,4 (=2). Entonces

$$\begin{array}{rl} \log 0,12540 = \bar{1},0983 & \\ \underline{\qquad\quad 2} & \text{Parte proporcional} \\ \log 0,12548 = \bar{1},0985. & \end{array}$$

PROBLEMAS

Hallar los logaritmos de los siguientes números:

1. 4583. *Solución.* 3,6612. 2. 16,426.

3. 0,09688. *Solución.* $\bar{2}$,9862. 4. 0,10108.

5. 1000,7. *Solución.* 3,0003. 6. 724200.

7. 9,496. *Solución.* 0,9775. 8. 0,0004586.

55. Hallar el número correspondiente a un logaritmo dado. Los siguientes ejemplos enseñan el procedimiento para hallar un número cuando se conoce su logaritmo. (Al número correspondiente a un logaritmo dado se le llama *antilogaritmo.*)

Ejemplo 1. Hallar el número cuyo logaritmo es 2,1892.

Solución. El problema puede enunciarse también así: hallar x sabiendo que

$$\log x = 2,1892.$$

En la tabla hallamos esta mantisa, 1892 exactamente, donde se cruzan la fila correspondiente al 154 de la columna *No.* y la columna encabezada por 6. Por tanto, las cuatro primeras cifras significativas del número buscado son 1546. Como la característica es 2, colocamos la coma decimal de tal manera que queden tres cifras a la izquierda de dicha coma, es decir, la colocamos entre 4 y 6. Por tanto,

$$x = 154,6.$$

Ejemplo 2. Hallar el número cuyo logaritmo es 4,8409.

Solución. Es decir, dado $\log x = 4,8409$, hallar x. Como la mantisa 8409 no se encuentra exactamente en nuestra tabla, interpolamos.

La mantisa dada, 8409, está comprendida entre los números 8407 y 8414 contenidos en la tabla.

Las tres primeras cifras significativas del número correspondiente a la mantisa menor, es decir, a 8407 son 693.

La diferencia tabular entre 8407 y 8414 es 7, y la diferencia entre 8407 y la mantisa dada, 8409, es 2.

En la columna de partes proporcionales, bajo el grupo correspondiente a la diferencia tabular 7, hallamos que la parte proporcional 2,1 es la más cercana a 2 en valor. A la izquierda de 2,1 hallamos 3, que es la cifra (adicional) que debe agregarse a las cifras del número 693 hallado en el segundo paso. Luego las cuatro primeras cifras significativas del número buscado son 6933.

Como la característica del logaritmo dado es 4, agregamos un cero y colocamos la coma decimal después de él para tener cinco cifras del número a la izquierda de la coma decimal. Finalmente,

$$x = 69\,330.$$

PROBLEMAS

Hallar los números correspondientes a los siguientes logaritmos.

1. 1,8055.	*Solución.* 63,90.	2. $\bar{1},4487$.
3. 0,2164.	*Solución.* 1,646.	4. 2,9487.

5. $\bar{2},0529$. *Solución.* 0,01130. **6.** 5,2668.

7. 3,9774. *Solución.* 9 493. **8.** $\bar{4},0010$.

9. 8,4430−10. *Solución.* 0,02773. **10.** 9,4975−10.

56. Uso de los logaritmos en los cálculos. Los siguientes ejemplos muestran el empleo de los logaritmos en los cálculos prácticos.

Ejemplo 1. Calcular por logaritmos $243 \times 13,49$.

Solución. Sea $x = 243 \times 13,49.$

Tomando logaritmos de ambos miembros,

$$\log x = \log 243 + \log 13,49. \qquad \text{Teor. I, Art. 50}$$

Tenemos que

$$\log 243 = 2,3856$$

$$\log 13,49 = 1,1300$$

Sumando, $\log x = 3,5156$

de donde, $x = 3278.$

Ejemplo 2. Calcular $\dfrac{1\,375 \times 0,06423}{76\,420}$.

Solución. Sea $x = \dfrac{1\,375 \times 0,06423}{76\,420}$.

Entonces, $\log x = \log 1\,375 + \log 0,06423 - \log 76\,420$

Teors. I y II, Art. 50

$$\log 1\,375 = 3,1383$$

$$\log 0,06423 = 8,8077 - 10$$

Sumando, $11,9460 - 10$

$$\log 76\,420 = 4,8832$$

Restando, $\log x = 7,0628 - 10$

$$x = 0,001156.$$

EJEMPLO 3. Calcular $(5,664)^3$.

Solución. Sea $$x = (5,664)^3.$$

Entonces, $$\log x = 3 \log 5,664. \qquad \text{Teor. III, Art. 50}$$

$$\log 5,664 = 0,7531$$
$$\underline{3}$$
$$\log x = 2,2593$$
$$x = 181,7.$$

EJEMPLO 4. Calcular $\sqrt[3]{0,7182}$.

Solución. Sea $$x = \sqrt[3]{0,7182} = (0,7182)^{\frac{1}{3}}.$$

Entonces, $$\log x = \tfrac{1}{3} \log 0,7182. \qquad \text{Teor. IV, Art. 50}$$

$$\log 0,7182 = \bar{1},8562$$
$$= 29,8562 - 30. \qquad \text{Ejemplo 5, Art. 52}$$
$$3)\underline{29,8562-30}$$
$$\log x = 9,9521 - 10$$
$$x = 0,8956.$$

EJEMPLO 5. Calcular $\sqrt[3]{\dfrac{\sqrt{7194}\times 87}{98\,080\,000}}$.

Solución. Sea $$x = \sqrt[3]{\frac{\sqrt{7194}\times 87}{98\,080\,000}} = \left[\frac{(7194)^{\frac{1}{2}}\times 87}{98\,080\,000}\right]^{\frac{1}{3}}.$$

Entonces, $$\log x = \tfrac{1}{3}\left[\tfrac{1}{2}\log 7\,194 + \log 87 - \log 98\,080\,000\right].$$

$$\log 7\,194 = 3,8569$$
$$2)\underline{3,8569}$$
$$\tfrac{1}{2}\log 7\,194 = 1,9285$$
$$\log 87 = \underline{1,9395}$$

Sumando, $$3,8680$$

o sea, $$13,8680 - 10$$
$$\log 98\,080\,000 = \underline{7,9916}$$

Restando, $$5,8764 - 10$$

o sea, $25,8764-30$ Ejemplo 5, Art. 52.

$$3)\underline{25,8764-30}$$

$$\log x = 8,6255-10$$

de donde, $x = 0,04222.$

EJEMPLO 6. Calcular $\dfrac{8\times 62,73\times 0,052}{56\times 8,793}$.

Solución. Sea $x = \dfrac{8\times 62,73\times 0,052}{56\times 8,793}$.

Entonces,

$$\log x = [\log 8+\log 62,73+\log 0,052]-[\log 56+\log 8,793].$$

$$\begin{array}{rlrl} \log 8 = & 0,9031 & \log 56 = & 1,7482 \\ \log 62,73 = & 1,7975 & \log 8,793 = & \underline{0,9442} \\ \log 0,052 = & \underline{8,7160-10} & \log \text{denominador} = & 2,6924 \\ \log \text{numerador} = & 11,4166-10 & & \\ \log \text{denominador} = & \underline{2,6924} & & \\ \log x = & 8,7242-10 & & \end{array}$$

de donde, $x = 0,05299.$ *

---

* En vez de buscar los logaritmos a medida que escribimos log 8, log 62 , 73, etc., es mejor escribir primero una forma ordenada o esqueleto de cálculo antes de usar las tablas. Así, para el ejemplo anterior, la disposición previa al cálculo sería:

$$\begin{array}{rlrl} \log 8 = & 0, & \log 56 = & 1, \\ \log 62,73 = & 1, & \log 8,793 = & \underline{0,\quad} \\ \log 0,052 = & \underline{8,\quad -10} & \log \text{denominador} = & \\ \log \text{numerador} = & & & \\ \log \text{denominador} = & \underline{\qquad\qquad} & & \\ \log x = & & & \end{array}$$

de donde, $x =$

De este modo se ahorra tiempo. Al buscar todos los logaritmos juntos, además hay menos posibilidades de que se olvide el escribir las características.

57. Cologaritmos. El logaritmo del recíproco de un número se llama *cologaritmo* (abreviado *colog*). Por tanto, si N es un número positivo cualquiera,

$$\text{colog } N = \log \frac{1}{N} = \log 1 - \log N \quad \text{Teor. II, Art. 50}$$
$$= 0 - \log N = -\log N.$$

Es decir, el cologaritmo de un número es igual a *menos* el logaritmo del número, afectando el signo menos a todo el logaritmo, característica y mantisa. Con el fin de evitar una mantisa negativa en el cologaritmo, se acostumbra restar el logaritmo del número de $10{,}0000-10$. Así, para el número 25, por ejemplo, tendremos:

$$\text{colog } 25 = \log \tfrac{1}{25} = \log 1 - \log 25.$$

Pero $\qquad \log 1 = 0,$

es decir, $\qquad \log 1 = 10{,}0000 - 10.$

Y como $\qquad \log 25 = \underline{\ \ 1{,}3979\qquad}$

resulta, $\qquad \text{colog } 25 = 8{,}6021 - 10$

Como dividir por un número es lo mismo que multiplicar por el recíproco del mismo, es evidente que cuando estamos calculando por medio de logaritmos podemos ya sea restar el logaritmo de un divisor o sumar su cologaritmo. Cuando se va a hacer un cálculo en el que el denominador de una fracción consta de varios factores, es más conveniente sumar los cologaritmos de los factores que restar sus logaritmos. De aquí la siguiente

Regla. *En vez de restar el logaritmo de un divisor, podemos sumar su cologaritmo. El cologaritmo de cualquier número se encuentra restando su logaritmo de* $10{,}0000-10$.

EJEMPLO 1. Hallar colog 52,63.

Solución.

$$\begin{array}{rl} & 10,0000-10 \\ \log 52,63 = & 1,7212 \\ \hline \text{colog } 52,63 = & 8,2788-10 \end{array}$$

EJEMPLO 2. Hallar colog 0,016548.

Solución.

$$\begin{array}{rl} & 10,0000-10 \\ \log 0,016548 = & 8,2187-10 \\ \hline \text{colog } 0,016548 = & 1,7813. \end{array}$$

Luego, vemos que la mantisa del cologaritmo puede obtenerse del logaritmo restando la última cifra significativa de la mantisa de 10 y cada una de las otras de 9.

Con el fin de mostrar cómo el empleo de los cologaritmos presenta el trabajo escrito en forma más resumida, calculemos la expresión del ejemplo 6 del artículo anterior, a saber,

$$x = \frac{8 \times 62,73 \times 0,052}{56 \times 8,793}.$$

Solución. Usando cologaritmos,

$$\log x = \log 8 + \log 62,73 + \log 0,052 + \text{colog } 56 + \text{colog } 8,793.$$

$$\begin{array}{rlll} \log 8 = & 0,9031 & & \\ \log 62,73 = & 1,7975 & & \\ \log 0,052 = & 8,7160-10 & & \\ \text{colog } 56 = & 8,2518-10 & \text{ya que} & \log 56 = 1,7482 \\ \text{colog } 8,793 = & 9,0558-10 & \text{ya que} & \log 8,793 = 0,9442 \\ \hline \log x = & 28,7242-30 & & \\ = & \bar{2},7242. & & \end{array}$$

De donde, $x = 0,05299.$

PROBLEMAS

Por medio de logaritmos, hallar el valor de cada una de las siguientes expresiones.

1. $9,238 \times 0,9152$. *Solución.* 8,454.

2. $4,832 \times 4\,938$.

3. $336,8 : 7\,984$. *Solución.* 0,04218.

4. $353,6 : 423,2$.

5. $0,002934 \times 48,4 \times 47,37$. *Solución.* 6,727.

6. $410,2 \times 0,12594$.

7. $\dfrac{1\,500,8 \times 0,0843}{0,06376 \times 4,248}$. *Solución.* 467,1.

8. $\dfrac{12,34 \times 186,42}{2,520 \times 23,26}$.

9. $(0,07396)^5$. *Solución.* 0,000002213.

10. $(1,2134)^4$.

11. $\sqrt{2}$. *Solución.* 1,414.

12. $\sqrt[3]{69,26}$.

13. $\sqrt[4]{5}$. *Solución.* 1,496.

14. $\sqrt[6]{0,24}$.

15. $\sqrt[3]{0,02305}$. *Solución.* 0,2846.

16. $\sqrt[4]{0,007777}$.

17. $\sqrt[3]{\dfrac{0,03296}{7,962}}$. *Solución.* 0,1606.

18. $\sqrt[3]{\dfrac{529}{134 \times 25,9}}$.

19. $\left(\dfrac{0,08726}{0,1321}\right)^{5/3}$. *Solución.* 0,5010.

20. $\left(\dfrac{35}{113}\right)^{3/8}$.

21. $\frac{1}{3}\sqrt{\frac{43,32}{968,5}}$. *Solución.* 0,0705.

22. $\frac{1}{5}\sqrt[3]{\frac{1}{32,6}}$.

23. $\frac{12\times 86,1\times\sqrt{345}}{0,087\times 411}$. *Solución.* 536,7.

24. $\left(\frac{2\sqrt{31,2}}{17,3}\right)^3$.

25. $\sqrt[8]{2}\times\sqrt[5]{3}\times\sqrt[7]{0,01}$. *Solución.* 0,7035.

26. $\frac{14\sqrt[3]{163}}{(21,2)^2}$.

27. $\frac{-401,8}{52,37}$. * *Solución.* −7,672.

28. $\frac{(-41,2)^3}{6,1\times 0,072}$.

29. $\frac{(-2563)(0,03442)}{(714,8)(-0,511)}$. *Solución.* 0,2415.

30. $\frac{1}{2\sqrt[3]{-0,012}}$.

31. El volumen de una esfera está dado por la fórmula $V=\frac{4}{3}\pi R^3$. ¿Cuál es el radio de una esfera cuyo volumen es 473,8 dm³? ($\pi=3,142$).

Solución. 4,837 dm.

32. Dada la fórmula $e=\frac{1}{2}gt^2$, en la cual $g=9,80$, hallar t cuando $e=366$.

---

* Por la definición de logaritmo (Art. 49) es evidente que un *número negativo* no tiene logaritmo. Si en un cálculo se presentan números negativos, deben ser tratados como si fueran positivos, y el signo del resultado debe determinarse por las reglas de los signos del Algebra, sin tomar en consideración las operaciones logarítmicas que se hayan hecho.

33. Si en el interés compuesto el monto A de P pesos al $r\%$ durante n años está dado por la fórmula $A = P(1+r)^n$, hallar el monto de \$2345 durante seis años al 4%. *Solución.* \$2966.

34. Dada la fórmula $T = \pi\sqrt{\frac{l}{g}}$ en la cual $g = 9,80$, hállese T cuando $l = 4,12$.

35. Dada la fórmula $R = \dfrac{abc}{4\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}}$ en la cual

$$s = \tfrac{1}{2}(a+b+c),$$

hallar R cuando $a = 231$, $b = 315$, $c = 396$. *Solución.* 198.

58. Cambio de base en los logaritmos. Hemos visto cómo puede hallarse en nuestras tablas el logaritmo decimal de un número. Pero algunas veces se necesita el logaritmo de un número en una base diferente de 10. Para mayor generalidad supongamos que han sido calculados los logaritmos de los números en la base a (mayor que cero) y deseamos encontrar el logaritmo de un número, N, en una base b (mayor que cero); es decir, se trata de expresar $\log_b N$ en función de los logaritmos de la base a.

Supongamos que

$$\log_b N = x,$$

es decir,

$$b^x = N.$$

Tomando logaritmos de base a de ambos miembros de esta ecuación, obtenemos

$$\log_a b^x = \log_a N,$$

o sea,

$$x \log_a b = \log_a N. \quad \text{Teorema III, Art. 50}$$

Y despejando x, $$x = \frac{\log_a N}{\log_a b}.$$

Pero como $$x = \log_b N,$$

resulta, $$\log_b N = \frac{\log_a N}{\log_a b}.$$

Teorema VI. *El logaritmo de un número en una nueva base* b *es igual al logaritmo del mismo número en la base original* a, *dividido por el logaritmo de* b *en la base* a.

Esta fórmula también se escribe en la forma

$$\log_b N = M \cdot \log_a N,$$

en donde $M = \dfrac{1}{\log_a b}$ se llama ***módulo*** *del nuevo sistema con respecto al sistema original.*

Por consiguiente, si se nos dan los logaritmos de los números en una cierta base a, y queremos hallar los logaritmos de los mismos números en una nueva base b, multiplicamos los logaritmos dados por el factor constante (módulo) $M = \dfrac{1}{\log_a b}$. Así, teniendo los logaritmos comunes (base 10) de los números, podemos obtener los logaritmos de los mismos números en la base e (=2,718) multiplicándolos por

$$M = \frac{1}{\log_{10} e} = 2{,}3026.$$

Los logaritmos de base e se llaman naturales o neperianos.

El número M no depende del número particular N, sino solamente de las dos bases a y b.

En los cálculos que siguen $a=10$, ya que las tablas que usamos están calculadas para la base 10.

EJEMPLO. Hallar $\log_3 21$.

Solución. Sea $$x = \log_3 21.$$

Entonces $$3^x = 21,$$

y $$x \log 3 = \log 21.$$

De donde, $$x = \frac{\log 21}{\log 3} = \frac{1,3222}{0,4771} = 2,771.$$

PROBLEMAS

Hallar los siguientes logaritmos:

1. $\log_2 7$. *Solución.* 2,808. **2.** $\log_3 4$.

3. $\log_4 9$. *Solución.* 1,585. **4.** $\log_5 7$.

5. $\log_9 8$. *Solución.* 0,9464. **6.** $\log_8 5$.

7. $\log_7 14$. *Solución.* 1,356. **8.** $\log_5 102$.

9. $\log_3 10$. *Solución.* 2,096. **10.** $\log_5 100$.

11. $\log_3 0,1$. *Solución.* $-2,096$. **12.** $\log_5 0,01$.

13. Hallar el logaritmo de $\frac{7}{11}$ en la base 0,5. *Solución.* 0,6522.

14. Hallar la base del sistema en el cual el logaritmo de 8 es $\frac{2}{3}$.

15. Demostrar que $\log_b a \cdot \log_a b = 1$.

16. Demostrar que $\log_N 10 = \dfrac{1}{\log_{10} N}$.

59. Ecuaciones exponenciales. Son aquellas en las cuales las cantidades desconocidas ocurren en los exponentes. Tales ecuaciones pueden resolverse frecuentemente por medio de logaritmos, como se puede ver en los siguientes ejemplos:

EJEMPLO 1. Hallar el valor de x en la ecuación $81^x = 10$.

Solución. Tomando logaritmos de ambos miembros,

$$\log 81^x = \log 10,$$

o sea. $$x \log 81 = \log 10.$$

Despejando x, $$x = \frac{\log 10}{\log 81} = \frac{1,0000}{1,9085} = 0,524.$$

EJEMPLO 2. Expresar la solución de la ecuación

$$a^{2x+3}b^x = c$$

en función de los logaritmos de las cantidades conocidas.

Solución. Tomando logaritmos de ambos miembros

$$\log a^{2x+3} + \log b^x = \log c. \qquad \text{Teor. I, Art. 50}$$

$$(2x+3)\log a + x \log b = \log c. \qquad \text{Teor. III, Art. 50}$$

$$2x \log a + 3 \log a + x \log b = \log c.$$

$$x\,(2 \log a + \log b) = \log c - 3 \log a.$$

$$x = \frac{\log c - 3 \log a}{2 \log a + \log b}.$$

EJEMPLO 3. Resolver el sistema:

$$(A) \qquad 2^x \cdot 3^y = 100.$$

$$(B) \qquad x + y = 4.$$

Solución. Tomando logaritmos de ambos miembros de (A) y multiplicando (B) por $\log 2$, obtenemos

$$x \log 2 + y \log 3 = 2$$

$$x \log 2 + y \log 2 = 4 \log 2$$

Restando, $\quad y\,(\log 3 - \log 2) = 2 - 4 \log 2$

Despejando y, $\quad y = \dfrac{2 - 4 \log 2}{\log 3 - \log 2} = \dfrac{2 - 1,2040}{0,4771 - 0,3010}$

$$y = \frac{0,7960}{0,1761} = 4,52.$$

Sustituyendo en (B), $\quad x = -0,52.$

PROBLEMAS

Resolver las siguientes ecuaciones:

1. $5^x = 12$. *Solución.* 1,544. **2.** $7^x = 25$.

3. $(0,4)^{-x} = 7$. *Solución.* 2,124. **4.** $10^{x-1} = 4$.

5. $4^{x-1}=5^{x+1}$. *Solución.* $-13,43$. **6.** $4^x=40$.

7. $(1,3)^x=7,2$. *Solución.* $7,527$. **8.** $(0,9)^{\frac{1}{x^2}}=(4,7)^{-\frac{1}{3}}$.

9. $7^{x+3}=5$. *Solución.* $-2,1729$. **10.** $2^{2x+3}-6^{x-1}=0$.

Resolver los siguientes sistemas de ecuaciones:

11. $4^x\cdot 3^y=8$, *Solución.* $x=0,9005$, **12.** $3^x\cdot 4^y=15\,552$,
$2^x\cdot 8^y=9$. $y=0,7564$. $4^x\cdot 5^y=128\,000$.

13. $2^x\cdot 2^y=2^{22}$. *Solución.* $x=13$, **14.** $2^x\cdot 2^y=18$.
$x-y=4$. $y=9$. $5^x\cdot 7^y=245$.

15. $a^{2x-3}\cdot a^{3y-2}=a^8$, *Solución.* $x=5$,
$3x+2y=17$. $y=1$.

Expresar la solución de cada una de las siguientes ecuaciones en función de logaritmos:

16. $A=P(1+r)^x$.

17. $a^{x^2+2x}=b$. *Solución.* $-1\pm\sqrt{\dfrac{\log ab}{\log a}}$.

18. $a^x\cdot b^y=m$,
$c^x\cdot d^y=n$.

60. Tablas de logaritmos de las funciones trigonométricas. Cuando se usan logaritmos en cálculos que contengan funciones trigonométricas se ahorra mucho trabajo si se dispone de los logaritmos de estas funciones en forma tabulada.* En este libro se dan dos tablas completas de los logaritmos

---

* Para hacer una distinción entre las dos clases de tablas, las tablas IV y V se llaman tablas trigonométricas naturales, mientras que los logaritmos de estas funciones dispuestos en forma tabulada se llaman tablas trigonométricas logarítmicas. Las tablas a que nos referimos son las que van al final de este libro.

de las funciones trigonométricas. La tabla II se usa cuando el ángulo dado o el buscado está expresado en grados, minutos y fracción decimal de minuto, y la tabla III cuando el ángulo dado o el que se busca está expresado en grados y fracción decimal de grado. Para ambas tablas son útiles las siguientes instrucciones:

Los ángulos comprendidos entre 0° y 45° están en la primera columna de la *izquierda* de cada página, * y el logaritmo de la función de cualquier ángulo se encontrará en la misma fila que el ángulo y en la columna encabezada con el nombre de la función.

Los ángulos comprendidos entre 45° y 90° están en la primera columna de la *derecha* de cada página, ** y el logaritmo de la función de cualquier ángulo comprendido en este intervalo se encontrará en la misma fila que el ángulo y en la columna que lleve el nombre de la función en su parte *inferior*.

Para evitar la impresión de características negativas se ha sumado el número 10 a cada logaritmo de las primera, segunda y cuarta columnas (las encabezadas con log sen, log tg y log cos). Por tanto, cualquier logaritmo tomado de estas tres columnas debe escribirse con -10 después de él. Los logaritmos de la tercera columna (encabezada con log ctg) se usan como están impresos. Así,

$$\log \operatorname{sen} 38^\circ\, 30' = 9{,}7941 - 10 = \bar{1}{,}7941.$$

$$\log \operatorname{ctg} 0^\circ\, 10' = 2{,}5363 = 2{,}5363.$$

$$\log \operatorname{tg} 75{,}6^\circ = 0{,}5905 = 0{,}5905.$$

$$\log \cos 2{,}94^\circ = 9{,}9994 - 10 = \bar{1}{,}9994.$$

---

* Los ángulos crecen a medida que leemos hacia abajo.

** Los ángulos crecen a medida que leemos hacia arriba.

61. Uso de la tabla II, en la que el ángulo dado o buscado está expresado en grados y minutos.* Esta tabla da los logaritmos de los senos, cosenos, tangentes y cotangentes de todos los ángulos desde $0°$ a $5°$ y desde $85°$ a $90°$ de minuto en minuto, y los logaritmos de las funciones trigonométricas de todos los ángulos desde $5°$ a $85°$ a intervalos de 10 minutos.

Las pequeñas columnas encabezadas con "dif. 1′" colocadas inmediatamente a la derecha de las encabezadas "log sen" y "log cos", contienen las diferencias, llamadas diferencias tabulares, en los logaritmos de los senos y cosenos correspondientes a una diferencia de un minuto en el ángulo. Análogamente, la pequeña columna encabezada "dif. com. 1′" contiene las diferencias tabulares para las funciones tangente y cotangente correspondientes a una diferencia de un minuto en el ángulo. Se observará que cualquiera diferencia tabular no está en el mismo renglón que el logaritmo, sino a la mitad de la distancia entre los dos logaritmos particulares cuya diferencia indica. Por supuesto que la diferencia tabular que debe tomarse es la que corresponde al intervalo en el cual está comprendido el ángulo en cuestión. Así, para encontrar log sen $78° 16'$, la diferencia tabular que interesa es la correspondiente al intervalo comprendido entre $78° 10'$ y $78° 20'$ que es 0,2.

---

* En caso de que el ángulo dado contenga segundos, primero se reducen los segundos a fracción decimal de minuto dividiendo por 60.

Así, $88° 18' 42'' = 88° 18,7'$, ya que $42'' = {}^{42}\!/_{60} = 0,7'$;

$2° \ 0' 16'' = 2° 0,27'$, ya que $16'' = {}^{16}\!/_{60} = 0,266' \ldots\ldots$

Si el ángulo está dado en grados y fracción decimal de grado y se desea usar la tabla II, el ángulo puede expresarse rápidamente en grados y minutos haciendo uso de la tabla de conversión al final de la tabla.

62. Cómo hallar el logaritmo de una función de un ángulo cuando el ángulo está expresado en grados y minutos. Los siguientes ejemplos enseñan el procedimiento para encontrar el logaritmo de una función trigonométrica cuando el ángulo está expresado en grados y minutos. Al interpolar, suponemos que las diferencias en los logaritmos son proporcionales a las diferencias en los ángulos correspondientes. A menos que el ángulo sea muy cercano a 0° ó 90°, esto es en general suficientemente exacto.

EJEMPLO 1. Hallar $\log \operatorname{tg} 32^\circ 30'$.

Solución. En la tabla II hallamos el ángulo $32^\circ 30'$, exactamente; por tanto, leemos inmediatamente de la tabla

$$\log \operatorname{tg} 32^\circ 30' = 9,8042-10.$$

EJEMPLO 2. Hallar $\log \operatorname{ctg} 88^\circ 17'$.

Solución. Leyendo hacia arriba en la tabla II, hallamos el ángulo $88^\circ 17'$, exactamente; por tanto,

$$\log \operatorname{ctg} 88^\circ 17' = 8,4767-10.$$

EJEMPLO 3. Hallar $\log \operatorname{sen} 23^\circ 26'$.

Solución. El ángulo exacto $23^\circ 26'$ no se encuentra en la tabla II; por tanto, interpolamos como sigue:

$$\begin{aligned} \log \operatorname{sen} 23^\circ 30' &= 9,6007-10 \\ \log \operatorname{sen} 23^\circ 20' &= 9,5978-10 \\ \hline 10' &= \quad 29 \end{aligned}$$

Como un incremento de $10'$ produce un incremento de 29 (diezmilésimas) en la mantisa, un incremento de $6'$ producirá un incremento de $0,6\times 29 = 17,4$, es decir, 17.

Por tanto, $\log \operatorname{sen} 23^\circ 26' = 9,5978-10+0,0017$

$$= 9,5995-10.$$

Usando la diferencia tabular, el proceso aparece como sigue:

log sen 23° 20′ = 9,5978 − 10		Dif. tab.	= 2,9
corr. por 6′ = 17		Exceso	= 6
log sen 23° 26′ = 9,5995 − 10.		Corr.	= 17,4

EJEMPLO 4. Hallar log cos 54° 42′ 18″.

Solución. Como 18″ es menos de medio minuto, los despreciamos, · de la tabla II obtenemos:

log cos 54° 40′ = 9,7622 − 10		Dif. tab.	= 1,8
corr. por 2′ = 4		Exceso	= 2
log cos 54° 42′ = 9,7618 − 10. *		Corr.	= 3,6
		es decir,	4

EJEMPLO 5. Hallar log ctg 1° 34,42′

Solución. De la tabla II:

log ctg 1° 34′ = 1,5630		Dif. tab.	= 46
corr. por 0,4′ = 18		Exceso	= 0,4
log ctg 1° 34,4′ = 1,5612.		Corr.	= 18,4

Cuando los ángulos están dados en la tabla a intervalos de 10′ es necesario tomar nuestro ángulo hasta el minuto, mientras que si los ángulos están dados para cada minuto, tomamos nuestro ángulo hasta la décima de minuto. Así, en el ejemplo 4 hallamos log cos 54° 42′, despreciando los segundos; en el ejemplo 5 hallamos log ctg 1° 34,4′, despreciando el final.

---

* Como el seno y la tangente crecen a medida que el ángulo crece, se les suma la corrección; pero como el coseno y la cotangente decrecen a medida que el ángulo crece, se les resta la corrección. Por supuesto esto es verdadero solamente para ángulos agudos.

PROBLEMAS

Hallar los siguientes logaritmos:

1. log tg 35° 50′. *Solución.* 9,8586 − 10. **2.** log sen 67° 20′.

3. log sen 61° 58′. *Solución.* 9,9458 − 10. **4.** log tg 72° 13′.

5. log tg 82° 3′. *Solución.* 0,8550. **6.** log sen 17° 36′.

7. log cos 44° 33′. *Solución.* 9,8528 − 10. **8.** log ctg 54° 18′.

9. log tg 12° 53′. *Solución.* 9,3593 − 10. **10.** log sen 3° 3,3′.

11. log tg 87° 15,6′. *Solución.* 1,3201.

12. log sen 86° 42′ 24″.

13. log cos 27° 28′. *Solución.* 9,9480 − 10. **14.** log ctg 36° 54′

15. log ctg 51° 49′. *Solución.* 9,8957 − 10. **16.** log cos 72° 38′

17. log sen 85° 56′ 18″. *Solución.* 9,9989 − 10.

18. log tg 4° 4′ 4″.

19. log ctg 24° 17′ 24″. *Solución.* 0,3457.

20. log cos 73° 3′ 48″.

21. log sen 123° 54′. *Solución.* 9,9191 − 10.

22. log tg 211° 21′.

23. log tg 243° 42′ 15″. *Solución.* 0,3060.

24. log cos 333° 33′ 11″.

63. Cómo encontrar el ángulo en grados y minutos que corresponde a un logaritmo dado de una función trigonométrica. Al buscar en la tabla el logaritmo dado debe ponerse mucha atención en que las funciones se encuentran en diferentes columnas, según que el ángulo sea mayor o menor de 45°. Si, por ejemplo, el logaritmo seno se encuentra en la columna encabezada con "log sen", los grados y minutos deben leerse en la columna extrema *izquierda*; pero si se encuentra en la columna que tiene "log sen" en su parte inferior, los grados y minutos deben leerse en la columna de la *derecha*; análogamente para las demás funciones. Así, si el logaritmo coseno se conoce, lo buscamos en las dos columnas de cada página, la que tiene "log cos" en la parte superior y la que lo tiene en la parte inferior.

EJEMPLO 1. Hallar el ángulo cuyo $\log \operatorname{tg} = 9,6946-10$.

Solución. Este problema puede también enunciarse como sigue: Sabiendo que $\log \operatorname{tg} x = 9,6946-10$, hallar el ángulo x. Buscando en la tabla II, en las columnas que tienen "log tg" en sus partes superior o inferior, hallamos 9,6946 exactamente. El ángulo correspondiente se encuentra entonces en la misma fila a la izquierda y es

$$x = 26^\circ\ 20'.$$

EJEMPLO 2. Hallar el ángulo cuyo $\log \operatorname{sen} = 9,6652-10$.

Solución. Es decir, sabiendo que $\log \operatorname{sen} x = 9,6652-10$, hallar el ángulo x. Buscando en la tabla II las columnas que tienen "log sen" en sus partes superior o inferior, no hallamos 9,6652 exactamente; pero el logaritmo más aproximado al dado es 9,6644, que corresponde al ángulo $27^\circ\ 30'$, y la correspondiente diferencia tabular para $1'$ es 2,4. Luego,

	Dif. tab. 1′	Exceso	Corr.
$\log \operatorname{sen} x = 9,6652-10$			
$\log \operatorname{sen} 27^\circ\ 30' = 9,6644-10$	2,4	8,0	3
exceso = 8		$\frac{72}{8}$	

Como la función de que se trata es el seno, sumamos esta corrección, y resulta

$$x = 27^\circ\ 30' + 3' = 27^\circ\ 33'.$$

EJEMPLO 3. Hallar el ángulo cuyo $\log \cos = 9,3705-10$.

Solución. Es decir, sabiendo que $\log \cos x = 9,3705-10$, hállese el ángulo x. Buscando en las columnas que tienen "log cos" en sus partes superior o inferior, no hallamos 9,3705 exactamente; pero el logaritmo inmediato inferior en tal columna es 9,3682, que corresponde al ángulo $76° 30'$, y la diferencia tabular correspondiente para $1'$ es $5,2$. Luego

	Dif. tab. $1'$	Exceso	Corr.
$\log \cos x = 9,3705-10$			
$\log \cos 76° 30' = 9,3682-10$	$5,2$	$23,0$	4
		208	
exceso $= \quad 23$		22	

Como la función de que se trata es el coseno, restamos esta corrección, y resulta

$$x = 76° 30' - 4' = 76° 26'.$$

EJEMPLO 4. Sabiendo que $\log \operatorname{tg} x = 8,7570-10$, hallar x.

Solución. El logaritmo tangente inmediato inferior al dado que se encuentra en la tabla II es $8,7565$. Tendremos:

	Dif. tab. $1'$	Exceso	Corr.
$\log \operatorname{tg} x = 8,7570-10$			
$\log \operatorname{tg} 3° 16' = 8,7565-10$	22	$5,0$	$0,2$
		44	
exceso $= \quad 5$		6	

Luego, $\qquad x = 3° 16' + 0,2' = 3° 16,2'.$

EJEMPLO 5. Dada $\operatorname{ctg} x = (1,01)^5$, hallar x.

Solución. Tomando logaritmos de ambos miembros,

$$\log \operatorname{ctg} x = 5 \log 1,01.$$

Pero $\qquad \log 1,01 = 0,0043$

y, multiplicando por 5, $\qquad 5$

$$\log \operatorname{ctg} x = 0,0215.$$

Para hallar x vemos que el logaritmo cotangente inmediato inferior al dado que se encuentra en la tabla II es 0,0202. Luego:

	Dif. tab. $1'$	Exceso	Corr.
$\log \operatorname{ctg} x = 0,0215$			
$\log \operatorname{ctg} 43° 40' = 0,0202$	$2,6$	$13,0$	5
		$13,0$	
exceso $= \quad 13$			

Luego, $\qquad x = 43° 40' - 5' = 43° 35'.$

EJEMPLO 6. Dado $184 \operatorname{sen}^3 x = (12,03)^2 \cos 57° 20'$, hállese x.

Solución. Despejando primero $\operatorname{sen} x$, obtenemos

$$\operatorname{sen} x = \sqrt[3]{\frac{(12,03)^2 \cos 57° 20'}{184}}.$$

Tomando logaritmos de ambos miembros,

$$\log \operatorname{sen} x = \tfrac{1}{3}[2 \log 12,03 + \log \cos 57° 20' + \operatorname{colog} 184].$$

$2 \log 12,03 = 2,1606$ ya que $\log 12,03 = 1,0803$.

$\log \cos 57° 20' = 9,7322-10$

$\operatorname{colog} 184 = 7,7352-10$ ya que $\log 184 = 2,2648$

$$\underline{\qquad\qquad}$$

$19,6280-20$

$3\,)\,\underline{29,6280-30}$

$\log \operatorname{sen} x = 9,8760-10$

de donde, $x = 48° 44'$.

PROBLEMAS

Hallar el ángulo agudo x de cada una de las siguientes igualdades:

1. $\log \operatorname{sen} x = 9,5443-10.$ *Solución.* $20° 30'$.
2. $\log \cos x = 9,8884-10.$
3. $\log \cos x = 9,7531-10.$ *Solución.* $55° 30'$.
4. $\log \operatorname{sen} x = 9,9702-10.$
5. $\log \operatorname{tg} x = 9,9570-10.$ *Solución.* $42° 10'$.
6. $\log \operatorname{ctg} x = 8,8960-10.$
7. $\log \operatorname{ctg} x = 1,0034.$ *Solución.* $5° 40'$.
8. $\log \operatorname{tg} x = 1,4289.$
9. $\log \operatorname{tg} x = 9,5261-10.$ *Solución.* $18° 34'$.
10. $\log \operatorname{sen} x = 9,5430-10.$

11. $\log \cos x = 8,7918-10$. *Solución*. $86^\circ 27'$.

12. $\log \operatorname{ctg} x = 0,2200$.

13. $\log \operatorname{sen} x = 9,8500-10$. *Solución*. $45^\circ 4'$.

14. $\log \operatorname{tg} x = 0,3801$.

15. $\log \operatorname{ctg} x = 0,6380$. *Solución*. $12^\circ 58'$.

16. $\log \cos x = 9,9910-10$.

17. $\log \operatorname{tg} x = 0,0035$. *Solución*. $45^\circ 14'$.

18. $\log \operatorname{sen} x = 8,9031-10$.

19. $\log \operatorname{sen} x = 9,8230-10$. *Solución*. $41^\circ 42'$.

20. $\log \operatorname{tg} x = 9,8372-10$.

21. $\log \cos x = 9,9000-10$. *Solución*. $37^\circ 25'$.

22. $\log \operatorname{ctg} x = 9,5670-10$.

23. $\log \operatorname{ctg} x = \bar{3},9732$. *Solución*. $89^\circ 27,7'$.

24. $\log \cos x = 8,8741-10$.

Por medio de logaritmos, hallar el valor de x en cada una de las siguientes ecuaciones:

25. $x = 13,4 \times \operatorname{sen} 47^\circ 32'$. *Solución*. 9,883.

26. $x = 0,734 : \cos 13^\circ 45'$.

27. $x = \operatorname{sen} 127^\circ : 0,0272$. *Solución*. 29,36.

28. $x = \sqrt{42,63 \operatorname{tg} 73^\circ 12'}$.

29. $x = \sqrt[3]{96,5 \cos 123^\circ}$. *Solución*. $-3,745$.

30. $\dfrac{65,92}{\operatorname{sen} 31^\circ 15'} = \dfrac{x}{\operatorname{sen} 72^\circ 44'}$.

31. $\dfrac{32,4}{x} = \dfrac{\operatorname{tg} 17^\circ 44'}{\operatorname{tg} 72^\circ 15'}$ *Solución*. 316,4.

32. $x = \dfrac{4,236 \cos 52^\circ 19'}{13,087 \operatorname{sen} 48^\circ 5'}$.

33. $x = \sqrt{\cos 10^\circ\ 5'\ \operatorname{tg} 73^\circ\ 11'}$. *Solución.* 1,805.

34. $1,5\ \operatorname{ctg} 82^\circ = x^2\ \operatorname{sen} 12^\circ\ 15'$.

35. $x = \dfrac{\operatorname{sen} 24^\circ\ 13'\ \operatorname{ctg} 58^\circ\ 2'}{\cos 33^\circ\ 17'\ \operatorname{tg} 199^\circ\ 58'}$. *Solución.* 0,8426.

36. $x = \dfrac{(\operatorname{sen} 213^\circ\ 18')^3 \sqrt{\operatorname{ctg} 71^\circ\ 20'}}{10,658\ \operatorname{tg} 63^\circ\ 54'}$.

37. $x = \sqrt{1,632 - \operatorname{sen} 67^\circ\ 38'}$. *Solución.* 0,8410.

38. $x = \tfrac{1}{3}\sqrt[3]{0,2426 + \cos 212^\circ\ 40'}$.

39. $2x^2 = 4,33\ \operatorname{sen} \dfrac{2\pi}{5}$. *Solución.* $\pm 1,4350$.

40. $x = \sqrt[3]{\dfrac{(0,8123)^2\ \operatorname{tg} \frac{5\pi}{6}}{62,62}}$.

41. Si $A = 38^\circ\ 18'$ y $x = 0,0421$, hallar el valor de

$$\sqrt[3]{\frac{\operatorname{sen} A\ \cos 3A}{2x\ \operatorname{tg}^2 2A}}.$$ *Solución.* $-0,5603$.

42. Si $A = 36^\circ\ 45'$ y $x = 3,23$, hallar el valor de

$$\frac{1}{3}\sqrt{\frac{x^3 \cos 2A}{\operatorname{tg} A\ \operatorname{sen} 3A}}.$$

Hallar el ángulo agudo x que satisface a cada una de las siguientes ecuaciones:

43. $\cos x = (0,009854)^{1/3}$. *Solución.* $77^\circ\ 37'$.

44. $\operatorname{sen} x = (0,9361)^{10}$.

45. $\dfrac{13,42}{\operatorname{sen} 27^\circ\ 48'} = \dfrac{26,95}{\operatorname{sen} x}$. *Solución.* $69^\circ\ 28'$.

46. $\operatorname{tg} x = \dfrac{64,3\ \operatorname{tg} 47^\circ\ 18'}{197,4}$.

Hallar los valores de x de $0°$ a $360°$ que satisfacen a cada una de las siguientes ecuaciones:

47. $3 \operatorname{ctg} x = \sqrt[5]{0,7}$. *Solución.* $72° 45'$, $252° 45'$.

48. $50 \operatorname{tg} x = \sqrt[4]{0,2584}$.

49. $2 \operatorname{sen}^3 x = \operatorname{sen} 111° 20'$. *Solución.* $50° 49'$, $129° 11'$.

50. $\cos x = \dfrac{31,3\sqrt{\cos\frac{\pi}{5}}}{54,6}$.

64. Uso de la tabla III, en la que el ángulo dado o buscado está expresado en grados y fracción decimal de grado. Esta tabla da los logaritmos de los senos, cosenos, tangentes y cotangentes de todos los ángulos desde $0°$ a $5°$ y desde $85°$ a $90°$ para cada centésima de grado, y los de todas las funciones trigonométricas de los ángulos desde $5°$ a $85°$ para cada décima de grado.

Las diferencias tabulares entre los logaritmos dados en la tabla están dadas de la misma manera que las diferencias tabulares de la tabla II, y la disposición general es la misma.

Los siguientes ejemplos muestran el uso de esta tabla:

Ejemplo 1. Hallar log sen 27,4°.

Solución. En la tabla III, hallamos el ángulo 27,4° exactamente; por tanto,

$$\log \operatorname{sen} 27,4° = 9,6629 - 10.$$

Ejemplo 2. Hallar log ctg 3,17°.

Solución. En la tabla III, hallamos el ángulo 3,17° exactamente; por tanto, obtenemos inmediatamente de la tabla

$$\log \operatorname{ctg} 3,17° = 1,2566.$$

EJEMPLO 3. Hallar log tg 61,87°.

Solución. El ángulo exacto, 61,87°, no se encuentra en nuestras tablas. El ángulo inmediato inferior es 61,8°, siendo 7 la cifra adicional del ángulo dado. En la tabla III, tenemos

$$\log \operatorname{tg} 61,8^\circ = 10,2707-10.$$

La diferencia tabular entre log tg 61,8° y log tg 61,9° es 18. En la columna de partes proporcionales, debajo de 18 y enfrente de la cifra adicional 7 hallamos la parte proporcional 12,6 (=13). Entonces,

$$\begin{array}{rl} \log \operatorname{tg} 61,80^\circ = 0,2707 & \\ 13 & \text{Parte propor.} \\ \hline \log \operatorname{tg} 61,87^\circ = 0,2720. & \end{array}$$

EJEMPLO 4. Hallar log ctg 2,158°.

Solución. El ángulo exacto, 2,158°, no se encuentra en nuestras tablas. El ángulo inmediato inferior es 2,15°, siendo 8 la cifra adicional del ángulo dado. En la tabla III, tenemos

$$\log \operatorname{ctg} 2,15^\circ = 1,4255.$$

La diferencia tabular entre log ctg 2,15° y log ctg 2,16° es 20. En la columna de partes proporcionales, debajo de 20 y enfrente de la cifra adicional 8 hallamos la parte proporcional 16. Entonces,

$$\begin{array}{rl} \log \operatorname{ctg} 2,150^\circ = 1,4255 & \\ 16 & \text{Parte propor.} \\ \hline \log \operatorname{ctg} 2,158^\circ = 1,4239. & \end{array}$$

PROBLEMAS

Hallar los siguientes logaritmos:

1. log tg 37,6°. *Solución.* 9,8865 − 10. **2.** log sen 3,13°.

3. log sen 63,87°. *Solución.* 9,9532 − 10. **4.** log tg 27,73°.

5. log cos 45,08°. *Solución.* 9,8443 − 10. **6.** log ctg 74,13°.

7. log tg 3,867°.	*Solución.* 8,8290−10.	**8.** log sen 2,352°.
9. log ctg 34,84°.	*Solución.* 0,1574.	**10.** log cos 64,62°.
11. log sen 155,42°.	*Solución.* 9,6191−10.	**12.** log tg 211,35°.
13. log tg 196,85°.	*Solución.* 9,4813−10.	**14.** log sen 121,67°.

EJEMPLO 5. Sabiendo que log tg x = 9,5364−10, hallar el ángulo x.

Solución. Buscando en las columnas que tienen "log tg" en sus partes superior o inferior, no hallamos 9,5364 exactamente. Lo localizamos entre 9,5345 y 9,5370. Excepto para la última cifra el ángulo buscado será el menor de los dos ángulos correspondientes, es decir, 18,9°. Entonces,

$$\log \operatorname{tg} 18{,}9^\circ = 9{,}5345-10$$
$$\log \operatorname{tg} x = 9{,}5364-10$$
$$19 = \text{diferencia.}$$

Siendo 25 la diferencia tabular correspondiente, hallamos en la columna de partes proporcionales correspondiente a 25, que 20 es la parte proporcional más cercana a 19. A la izquierda de 20 está la última cifra (adicional) 8 del ángulo buscado. Por tanto, x = 18,98°.

EJEMPLO 6. Hallar el valor de x que satisface la igualdad

$$\log \cos x = 8{,}6820-10.$$

Solución. En la tabla III localizamos 8,6820 entre 8,6810 y 8,6826. Excepto para la última cifra el ángulo buscado es el menor de los dos ángulos correspondientes, es decir, 87,24°. Entonces

$$\log \cos 87{,}24^\circ = 8{,}6826-10$$
$$\log \cos x = 8{,}6820-10$$
$$6 = \text{diferencia.}$$

Siendo 16 la diferencia tabular correspondiente, hallamos en la columna de partes proporcionales encabezada por 16 que 6,4 es la parte proporcional más cercana a 6. A la izquierda de 6,4 está la última cifra (adicional) 4 del ángulo buscado. Por tanto, x = 87,244°.

EJEMPLO 7. Sabiendo que $\operatorname{tg} x = (1,018)^{12}$, hallar x.

Solución. Tomando logaritmos de ambos miembros,

$$\log \operatorname{tg} x = 12 \log 1,018.$$

$$\begin{array}{r} \log 1,018 = 0,0077 \\ 12 \\ \hline \log \operatorname{tg} x = 0,0924 \end{array}$$

En la tabla localizamos 0,0924 entre 0,0916 y 0,0932. Entonces,

$$\begin{array}{r} \log \operatorname{tg} 51,0^\circ = 0,0916 \\ \log \operatorname{tg} x = 0,0924 \\ \hline 8 = \text{diferencia.} \end{array}$$

La diferencia tabular es 16. En la columna de partes proporcionales en la tablilla correspondiente a 16 hallamos 8,0 exactamente. A la izquierda de 8,0 se halla la última cifra 5 del ángulo buscado. Por tanto, $x = 51,05^\circ$.

EJEMPLO 8. Hallar x en la ecuación

$$56,4 \operatorname{tg}^5 x = (18,65)^5 \cos 69,8^\circ.$$

Solución. Primero despejaremos $\operatorname{tg} x$:

$$\operatorname{tg} x = \sqrt[5]{\frac{(18,65)^5 \cos 69;8^\circ}{56,4}}.$$

Tomando logaritmos de ambos miembros,

$$\log \operatorname{tg} x = \tfrac{1}{5}\,[5 \log 18,65 + \log \cos 69,8^\circ + \operatorname{colog} 56,4].$$

$$\begin{array}{rll} 5 \log 18,65 = & 6,3535 & \text{ya que } \log 18,65 = 1,2707 \\ \log \cos 69,8^\circ = & 9,5382-10 & \\ \operatorname{colog} 56,4 = & 8,2487-10 & \text{ya que } \log 56,4 = 1,7513 \\ \hline & 24,1404-20 & \\ & 5)\,54,1404-50 & \\ \hline \log \operatorname{tg} x = & 10,8281-10. & \end{array}$$

De donde, $x = 81,55^\circ$.

PROBLEMAS

Usando la tabla III, hallar el ángulo agudo x que satisface a cada una de las siguientes ecuaciones:

1. $\log \operatorname{sen} x = 9,6371-10.$ *Solución.* $25,7°.$

2. $\log \cos x = 9,9873-10.$

3. $\log \operatorname{tg} x = 8,9186-10.$ *Solución.* $4,74°.$

4. $\log \operatorname{ctg} x = 1,1597.$

5. $\log \cos x = 9,9629-10.$ *Solución.* $23,35°.$

6. $\log \operatorname{sen} x = 9,5052-10.$

7. $\log \operatorname{tg} x = 9,8380-10.$ *Solución.* $34,55°.$

8. $\log \operatorname{sen} x = 9,9671-10.$

9. $\log \operatorname{ctg} x = 9,3361-10.$ *Solución.* $77,77°.$

10. $\log \cos x = 9,8490-10.$

11. $\log \operatorname{sen} x = 8,6852-10.$ *Solución.* $2,776°.$

12. $\log \operatorname{tg} x = 1,6261.$

13. $\log \cos x = 9,8000-10.$ *Solución.* $50,88°.$

14. $\log \operatorname{ctg} x = 9,3680-10.$

15. $\log \operatorname{tg} x = 0,0035.$ *Solución.* $45,23°.$

16. $\log \operatorname{sen} x = 9,8498-10$

17. $\log \operatorname{ctg} x = 2,0000.$ *Solución.* $0,573°.$

18. $\log \cos x = 8,8941-10.$

Por medio de logaritmos, hallar el valor de x en cada una de las siguientes ecuaciones:

19. $x = 39,3 \operatorname{sen}^2 42,32°.$ *Solución.* $17,82.$

20. $x = \dfrac{0,2136}{0,173 \cos 72,38°}.$

21. $x = \dfrac{26,52 \text{ tg } 33,86^\circ}{100,85 \text{ ctg } 88,963^\circ}$. *Solución.* 9,745.

22. $\dfrac{x}{\text{sen } 22,45^\circ} = \dfrac{123,45}{\text{sen } 72,44^\circ}$.

23. $\sqrt{3} \text{ sen } 48,06^\circ = x^3 \cos 2,143^\circ$. *Solución.* 1,088.

24. $x^2 \text{ sen } 63,75^\circ = \sqrt{211} \text{ ctg } 39,63^\circ$.

25. $x = \sqrt[3]{21,72 \cos 122,16^\circ}$. *Solución.* $-2,261$.

26. $x = \sqrt{361 \text{ tg } 267,5^\circ \text{ sen } 9,53^\circ}$.

Hallar el ángulo agudo x que satisface a cada una de las siguientes ecuaciones:

27. $\cos x = \sqrt{0,9681}$. *Solución.* 10,25°.

28. $5 \text{ ctg } x = \sqrt[3]{0,4083}$.

29. $\text{sen } x = \dfrac{\sqrt{83} \cos 52,82^\circ}{(13,382)^2}$. *Solución.* 1,762°.

30. $\text{tg } x = \sqrt{\dfrac{4,2 \text{ tg } 47,22^\circ}{\cos 17,55^\circ}}$.

Cuando consideramos lo complicado de las expresiones que intervienen en los dos últimos grupos de problemas, y en los problemas correspondientes al Artículo 57, reconocemos la gran ventaja del uso de los logaritmos en el cálculo numérico. La multiplicación y la división son reemplazadas por las sencillas operaciones de adición y sustracción; la elevación a potencias y la extracción de raíces se sustituyen por simples multiplicaciones y divisiones en las que un factor y el divisor raras veces constan de más de una sola cifra.

Ahora vamos a aplicar los logaritmos a la resolución de triángulos.

65. Uso de los logaritmos en la resolución de triángulos rectángulos. Los principios referentes al análisis de problemas sobre el triángulo rectángulo, y a la resolución de tales problemas por medio de las funciones trigonométricas naturales, ya han sido considerados en el Artículo 37.

Los siguientes ejemplos enseñarán el mejor camino a seguir en la resolución de triángulos rectángulos, con ayuda de los logaritmos.

Ejemplo 1. Resolver el triángulo rectángulo si $A=48°\ 17'$, $c=324$. Hallar también el área.

Solución. Dibujemos un triángulo (fig. 95) indicando las partes conocidas y desconocidas. Tendremos:

$$B = 90° - A = 41°\ 43'.$$

Para hallar a, usemos $a = c \operatorname{sen} A$.
Tomando logaritmos de ambos miembros,

$$\log a = \log c + \log \operatorname{sen} A.$$

De las tablas I y II, * obtenemos

$$\begin{aligned} \log c &= 2,5105 \\ \log \operatorname{sen} A &= 9,8730-10 \\ \hline \log a &= 12,3835-10 \\ &= 2,3835. \end{aligned}$$

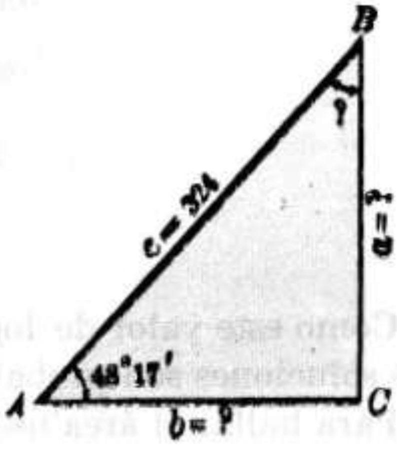


Fig. 95

De donde, $a = 241,8.$

Para hallar b, usemos $b = c \cos A.$

Tomando logaritmos de ambos miembros,

$$\log b = \log c + \log \cos A.$$

---

* Si deseamos usar la tabla III en vez de la tabla II, reduciremos 17′ a fracción decimal de grado. Así, $A = 48°\ 17' = 48,28°$.

De las tablas I y II, obtenemos

$$\log c = 2,5105$$

$$\log \cos A = 9,8231-10$$

$$\log b = 12,3336-10$$

$$= 2,3336.$$

De donde, $b = 215,6.$

Comprobación. Para comprobar estos resultados numéricamente, veamos si a, b y c satisfacen la igualdad

$$a^2 = c^2-b^2 = (c+b)\ (c-b),$$

o, usando logaritmos, $2 \log a = \log (c+b)+\log (c-b),$

es decir, $\log a = \frac{1}{2} [\log (c+b)+\log (c-b)].$

Aquí, $c+b = 539,6$ y $c-b = 108,4.$

$$\log (c+b) = 2,7321$$

$$\log (c-b) = 2,0350$$

$$2 \log a = 4,7671$$

$$\log a = 2,3835.$$

Como este valor de $\log a$ es el mismo que el obtenido anteriormente, las soluciones son probablemente correctas.

Para hallar el área usemos la fórmula

$$\text{área} = \frac{ab}{2}.$$

$$\log \text{área} = \log a+\log b-\log 2.$$

$$\log a = 2,3835$$

$$\log b = 2,3336$$

$$4,7171$$

$$\log 2 = 0,3010$$

$$\log \text{área} = 4,4161.$$

De donde, $\text{área} = 26,070.$

EJEMPLO 2. Resolver un triángulo rectángulo, dados el cateto $b = 15,12$ y la hipotenusa $c = 30,81$.

Solución. Primero calculamos un ángulo agudo. Para hallar A, usemos

$$\cos A = \frac{b}{c}.$$

$$\log \cos A = \log b - \log c.$$

$$\log b = 11,1796-10$$

$$\log c = 1,4887$$

$$\log \cos A = 9,6909-10$$

de donde, $A = 60° \, 36'.$

Fig. 96

Por tanto, $B = 90° - A = 29° \, 24'.$

Para hallar a, podemos usar

$$a = b \operatorname{tg} A.$$

$$\log a = \log b + \log \operatorname{tg} A.$$

$$\log b = 1,1796$$

$$\log \operatorname{tg} A = 0,2491$$

$$\log a = 1,4287$$

de donde, $a = 26,84.$

Comprobación. $a^2 = (c+b)(c-b).$

$$\log a = \tfrac{1}{2}\left[\log(c+b) + \log(c-b)\right].$$

$$c+b = 45,93 \quad \text{y} \quad c-b = 15,69.$$

$$\log(c+b) = 1,6621$$

$$\log(c-b) = 1,1956$$

$$2 \log a = 2,8577$$

$$\log a = 1,4288.$$

Lo que comprueba el resultado anterior.

EJEMPLO 3. Resolver el triángulo rectángulo en el que

$$B = 2{,}325^\circ, \quad a = 1\,875{,}3.$$

Solución. $A = 90^\circ - B = 87{,}675^\circ.$

Despejando de la fórmula sen $A = \dfrac{a}{c}$ el lado desconocido c, tendremos:

Fig. 97

$$c = \frac{a}{\operatorname{sen} A}.$$

$$\log c = \log a - \log \operatorname{sen} A.$$

De las tablas I y III, * obtenemos:

$$\begin{aligned} \log a &= 13{,}2731-10 \\ \log \operatorname{sen} A &= \underline{9{,}9996-10} \\ \log c &= 3{,}2735 \end{aligned}$$

de donde, $c = 1\,877.$

Despejando de la fórmula tg $A = \dfrac{a}{b}$ el lado desconocido b, tendremos:

$$b = \frac{a}{\operatorname{tg} A}.$$

$$\log b = \log a - \log \operatorname{tg} A.$$

$$\begin{aligned} \log a &= 13{,}2731-10 \\ \log \operatorname{tg} A &= \underline{11{,}3915-10} \\ \log b &= 1{,}8816 \end{aligned}$$

de donde, $b = 76{,}13.$

---

* Si deseamos usar la tabla II en vez de la tabla III, reduciremos 2,325° a grados y minutos. Así, $B = 2{,}325^\circ = 2^\circ\, 19{,}5'$.

Para comprobar, podemos usar las fórmulas

$$a^2 = (c+b)\,(c-b)$$

o

$$b = c \text{ sen } B,$$

ya que ninguna de ellas fué usada en los cálculos.

PROBLEMAS

Resolver los siguientes triángulos rectángulos usando las tablas I y II.* En cada caso $C = 90°$. Comprobar las soluciones.

1. $A = 43° 30'$, $c = 11,2$.

Solución. $B = 46° 30'$, $a = 7{,}708$, $b = 8{,}124$.

2. $A = 67° 10'$, $c = 402$.

3. $B = 62° 56'$, $b = 47{,}7$.

Solución. $A = 27° 4'$, $a = 24{,}37$, $c = 53{,}56$.

4. $B = 17° 44'$, $b = 0{,}727$.

---

* Por razón de claridad y simplicidad hemos dado un grupo de ejemplos sobre triángulos con datos que se adaptan a la tabla II, por estar los ángulos dados y los que se buscan expresados en grados y minutos, y hemos dado otro grupo para practicar el uso de la tabla III, en el que los ángulos dados y los que se buscan están expresados en grados y fracción decimal de grado. El lector, por supuesto, puede resolver los ejercicios del primer grupo usando la tabla III, y los del segundo grupo usando la tabla II, si así lo desea; pero esto evidentemente requerirá mayor trabajo. Este trabajo adicional de convertir minutos a fracción decimal de grado, o viceversa, puede reducirse a un mínimo haciendo uso de las tablas de conversión que se incluyen al final de la tabla II. Es posible, además, que la solución así obtenida difiera de la dada en el libro, en una unidad de la última cifra decimal. Este sistema de dar un grupo de ejemplos sobre triángulos para cada una de las tablas II y III se seguirá en todo el libro cuando se trate de resolver triángulos.

5. $a = 0,624$, $c = 0,910$.

Solución. $A = 43° 18'$, $B = 46° 42'$, $b = 0,6622$.

6. $a = 142,7$, $c = 743,2$.

7. $A = 72° 7'$, $a = 83,4$.

Solución. $B = 17° 53'$, $b = 26,91$, $c = 87,64$.

8. $A = 21° 44'$, $a = 0,7683$.

9. $A = 52° 41'$, $b = 4\,247$.

Solución. $B = 37° 19'$, $a = 5\,571$. $c = 7\,007$.

10. $A = 44° 44'$, $b = 0,7272$.

11. $b = 2,887$, $c = 5,110$.

Solución. $B = 34° 24'$, $A = 55° 36'$, $a = 4,217$.

12. $b = 59,31$, $c = 73,12$.

13. $a = 101$, $b = 116$.

Solución. $A = 41° 2'$, $B = 48° 58'$, $c = 153,85$.

14. $a = 0,4623$, $b = 0,3015$.

15. $B = 10° 51'$, $c = 0,7264$.

Solución. $A = 79° 9'$, $a = 0,7133$, $b = 0,1367$.

16. $B = 67° 45'$, $c = 525,4$.

17. $B = 21° 34'$, $a = 0,8211$.

Solución. $A = 68° 26'$, $b = 0,3246$, $c = 0,8828$.

18. $B = 69° 12'$, $a = 742,3$.

19. $a = 10,107$, $b = 17,303$.

Solución. $A = 30° 18'$, $B = 59° 42'$, $c = 20,04$.

20. $a = 7\,627$, $b = 2\,823$.

21. Hallar las áreas de los triángulos de los problemas 1, 2 y 3.

Solución. 1) 31,32; 2) 28 900; 3) 581,3.

22. Hallar las áreas de los triángulos de los problemas 4 y 5.

Resolver los siguientes triángulos rectángulos usando las tabl I y III. Comprobar las soluciones.

23. $a = 273$, $b = 418$.

Solución. $A = 33{,}15°$, $B = 56{,}85°$, $c = 499{,}3$.

24. $a = 0{,}505$, $b = 0{,}303$.

25. $A = 58{,}65°$, $c = 35{,}73$.

Solución. $B = 31{,}35°$, $a = 30{,}51$, $b = 18{,}59$.

26. $B = 26{,}33°$, $c = 7{,}623$.

27. $B = 23{,}15°$, $b = 75{,}48$.

Solución. $A = 66{,}85°$, $a = 176{,}5$, $c = 192$.

28. $B = 46{,}32°$, $b = 0{,}6241$.

29. $A = 31{,}75°$, $a = 48{,}04$.

Solución. $B = 58{,}25°$, $b = 77{,}64$, $c = 91{,}28$.

30. $A = 51{,}23°$, $c = 900{,}6$.

31. $b = 512$, $c = 900$.

Solución. $A = 55{,}32°$, $B = 34{,}68°$, $a = 740{,}2$.

32. $b = 0{,}6723$, $c = 0{,}9251$.

33. $a = 52$, $c = 60$.

Solución. $A = 60{,}06°$, $B = 29{,}94°$, $b = 29{,}94$.

34. $a = 0{,}4261$, $c = 1{,}0432$.

35. $A = 88{,}426°$, $b = 9$.

Solución. $B = 1{,}574°$, $a = 327{,}5$, $c = 327{,}6$.

36. $A = 2{,}327°$, $b = 1\,000$.

37. $B = 85{,}475°$, $c = 80$.

Solución. $A = 4{,}525°$, $a = 6{,}313$, $b = 79{,}74$.

38. $B = 4{,}444°$, $a = 72{,}63$.

En los siguientes problemas úsense las tablas I y II:

39. Resolver los siguientes triángulos isósceles, en los cuales A, B, C son los ángulos y a, b, c los lados opuestos respectivamente, siendo a y b los lados iguales.

a. $A = 68° 57'$, $b = 35{,}09$. *Solución.* $C=42° 6'$, $c=25{,}21$.

b. $B = 27° 8'$, $c = 3{,}088$.

c. $C = 80° 47'$, $b = 2\,103$. *Solución.* $A=49° 37'$, $c=2\,725$.

d. $a = 79{,}24$, $c=106{,}62$.

e. $C = 151° 28'$, $c = 95{,}47$. *Solución.* $A=14° 16'$, $a=49{,}26$.

40. Hallar las áreas de los triángulos correspondientes a los casos **a**), **c**) y **d**) del problema 39.

41. Un lado de un octágono regular es 24 m. Hallar su área y los radios de los círculos inscrito y circunscrito.

Solución. Area = 2 782 m², $r = 28{,}97$ m, $R = 31{,}36$ m.

42. El perímetro de un polígono regular de 11 lados es 23,47 m. Calcular el radio del círculo circunscrito.

43. En un círculo de radio 12 732 m, la longitud de una cuerda es de 18 321 m. Hallar el ángulo central correspondiente a la cuerda.

Solución. 92° 2'.

44. Si el radio de un círculo es de 10 cm, ¿cuál es la longitud de una cuerda que subtiende un ángulo central de 77° 18'?

45. Una roca de la orilla de un río está a 39,6 m sobre el nivel del agua. Desde un punto exactamente opuesto a la roca sobre la otra orilla del río, el ángulo de elevación de la punta de la roca es de 14° 36'. Calcular el ancho del río. *Solución.* 152 m.

46. La sombra de un peñasco vertical de 113 m de altura toca exactamente a un bote que está a 93 m de su base. Hallar la altura del Sol sobre el horizonte.

47. Un observador colocado en la azotea del edificio Empire State, que tiene 1 248 pies de altura, observa el ángulo de depresión de la azotea de un edificio de 752 pies de altura y resulta ser de 22° 16′. Si los dos edificios están sobre el mismo nivel horizontal, calcular la distancia entre ellos. *Solución.* 1 212 pies.

48. Dos boyas se encuentran hacia el Sur de un faro de 178 m de altura. Sus ángulos de depresión desde la parte superior del faro son 18° 22′ y 11° 36′. ¿A qué distancia están las boyas?

49. Un coche corre a la velocidad de 48 Km por hora ascendiendo una pendiente que forma un ángulo de 10° con la horizontal. ¿Cuánto tiempo tardará el coche en elevarse 60 m? *Solución.* 26,1 seg.

50. El brazo portante de una grúa es de 15 m de largo. ¿A qué altura levanta una vigueta de acero cuando gira de 22° 12′ a 38° 46′ con la horizontal?

51. Desde la punta de un faro de 61,5 m sobre el nivel del mar en marea baja, se observa que el ángulo de depresión de una boya es 29° 14′ en marea baja y 28° 12′ en marea alta. ¿Cuál es la elevación de las aguas? *Solución.* 2,56 m.

52. En la figura 98, AC es perpendicular a DC. Los valores de α y β y la longitud h se obtienen midiéndolos. Demostrar que las longitudes de $AC = x$ y de $BC = y$, en función de α, β y h están dadas por las fórmulas

$$x = \frac{h}{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}, \quad y = \frac{h \operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\beta - \operatorname{tg}\alpha}.$$

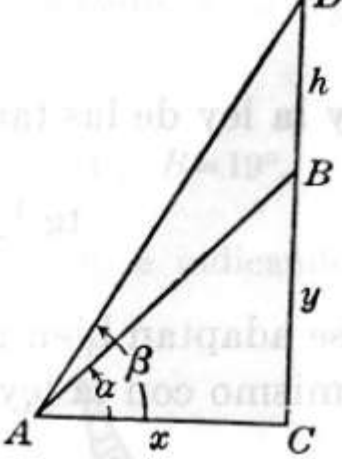


Fig. 98

53. Un monumento de 162 pies de altura se eleva sobre una roca. Desde un punto del mismo nivel que la base de la roca se observa que los ángulos de elevación de la punta y de la base del monumento son 38° 14′ y 31° 52′, respectivamente. Calcular la altura de la roca. Usar para efectuarlo una de las fórmulas deducidas en el problema 52. *Solución.* 605,4 pies.

54. Un observador en un puente halla que desde un cierto punto el ángulo de depresión de una roca situada directamente abajo del puente es de 48° 36′. Después de caminar 12 m, la roca está aún enfrente de él y el ángulo de depresión es de 53° 14′. ¿A qué altura está el puente sobre la roca?

55. Un avión cuya velocidad en el aire tranquilo es de 90 millas por hora, vuela en línea recta de Nueva York a Washington una distancia de 190 millas. Durante el viaje tiene que luchar contra un viento que tiene una velocidad de 40 millas por hora y que sopla en dirección perpendicular a la del avión. Hallar: **a)** el ángulo que, por la acción del viento, se desvía el avión de la dirección adonde apunta; **b)** el tiempo empleado en el viaje.

Solución. **a)** 26° 24′;
b) 2 horas 21,4 minutos.

66. Empleo de los logaritmos en la resolución de triángulos oblicuángulos. Ya se ha visto que las fórmulas que contienen principalmente productos, cocientes, potencias y raíces se adaptan bien al cálculo logarítmico; en cambio, en el caso de las fórmulas que contienen principalmente sumas y diferencias, las ventajas de ahorro de trabajo mediante el cálculo logarítmico no son tan marcadas. Así, en la resolución de triángulos oblicuángulos, la ley de los senos,

$$\frac{a}{\operatorname{sen} A} = \frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C},$$

y la ley de las tangentes,

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{a-b}{a+b} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A+B),$$

se adaptan bien al uso de los logaritmos, pero no sucede lo mismo con la ley de los cosenos, a saber,

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2\,bc \cos A.$$

En la resolución de triángulos oblicuángulos por cálculo logarítmico es conveniente clasificar los problemas como sigue:

CASO I. *Cuando se conocen dos ángulos y un lado.*

CASO II. *Cuando se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos (caso ambiguo).*

CASO III. *Cuando se conocen dos lados y el ángulo que forman.*

CASO IV. *Cuando se conocen los tres lados.*

Estos casos corresponden a los de igualdad de triángulos.

CASO I. *Cuando se conocen dos ángulos y un lado.*

Primer paso. *Se calcula el tercer ángulo restando de 180° la suma de los dos ángulos dados.*

Segundo paso. *Para hallar uno de los lados desconocidos, se elige un par de las razones dadas por la ley de los senos,*

$$\frac{a}{\text{sen } A}=\frac{b}{\text{sen } B}=\frac{c}{\text{sen } C},$$

que contenga solamente una incógnita, y se despeja dicha incógnita.

Comprobación. *Se verá si los lados hallados satisfacen la ley de las tangentes.*

EJEMPLO. Resolver el triángulo dados $b=20$, $A=104°$, $B=19°$.

Solución. Trazando una figura del triángulo (fig. 99) e indicando sobre él los elementos conocidos y desconocidos vemos que el problema corresponde al caso I.

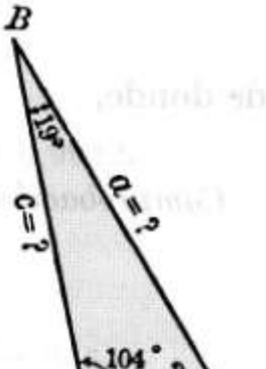


Fig. 99

Primer paso. $C=180°-(A+B)$

$=180°-123°$

$=57°.$

Segundo paso. Despejando a de la proporción,

$$\frac{a}{\text{sen } A}=\frac{b}{\text{sen } B},$$

obtenemos
$$a=\frac{b \text{ sen } A}{\text{sen } B},$$

o también, $\log a = \log b + \log \operatorname{sen} A - \log \operatorname{sen} B$

$$\begin{array}{rl} \log b = & 1,3010 \\ \log \operatorname{sen} A = & 9,9869-10\ * \\ \hline & 11,2879-10 \\ \log \operatorname{sen} B = & 9,5126-10 \\ \hline \log a = & 1,7753 \end{array}$$

de donde, $a = 59,61.$

Despejando c de la proporción

$$\frac{b}{\operatorname{sen} B} = \frac{c}{\operatorname{sen} C}, \text{ obtenemos}$$

$$c = \frac{b \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} B},$$

o sea, $\log c = \log b + \log \operatorname{sen} C - \log \operatorname{sen} B.$

$$\begin{array}{rl} \log b = & 1,3010 \\ \log \operatorname{sen} C = & 9,9236-10 \\ \hline & 11,2246-10 \\ \log \operatorname{sen} B = & 9,5126-10 \\ \hline \log c = & 1,7120 \end{array}$$

de donde, $c = 51,52.$

Comprobación. $a+c = 111,13, \qquad a-c = 8,09;$

$A+C = 161°, \qquad A-C = 47°;$

$\frac{1}{2}(A+C) = 80°\ 30', \qquad \frac{1}{2}(A-C) = 23°\ 30'.$

---

* $\operatorname{Sen} A = \operatorname{sen} 104° = \operatorname{sen}(180° - 104°) = \operatorname{sen} 76°$. Por tanto,

$\log \operatorname{sen} 104° = \log \operatorname{sen} 76° = 9,9869-10.$

Sustituyendo estos valores en la fórmula de la ley de las tangentes

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A-C) = \frac{a-c}{a+c} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A+C),$$

o sea,

$$\log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A-C) = \log(a-c) + \log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A+C) - \log(a+c).$$

$$\begin{aligned}
\log(a-c) &= 0,9079 \\
\log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A+C) &= \underline{10,7764-10} \\
& 11,6843-10 \\
\log(a+c) &= \underline{2,0458} \\
\log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A-C) &= 9,6385-10
\end{aligned}$$

de donde,

$$\tfrac{1}{2}(A-C) = 23^\circ\, 31',$$

valor que concuerda con el obtenido anteriormente.

PROBLEMAS

Usando las tablas I y II, resolver los triángulos oblicuángulos que tienen los siguientes elementos como datos. Comprobar las soluciones.

1. $a=795$, $A=79^\circ\, 59'$, $B=44^\circ\, 41'$.

Solución. $C=55^\circ\, 20'$, $b=567{,}6$, $c=663{,}9$.

2. $a=400$, $A=54^\circ\, 28'$, $C=60^\circ$.

3. $b=0{,}8037$, $B=52^\circ\, 20'$, $C=101^\circ\, 40'$.

Solución. $A=26^\circ$, $a=0{,}4450$, $c=0{,}9942$.

4. $c=161$, $A=35^\circ\, 15'$, $C=123^\circ\, 39'$.

5. $b=29{,}01$, $A=87^\circ\, 40'$, $C=33^\circ\, 15'$.

Solución. $B=59^\circ\, 5'$, $a=33{,}78$, $c=18{,}54$.

6. $a=5{,}421$, $B=42^\circ\, 17'$, $C=82^\circ\, 28'$.

7. $c=2\,071$, $A=31^\circ\, 9'$, $B=115^\circ\, 24'$.

Solución. $C=33^\circ\, 27'$, $a=1\,944$, $b=3\,395$.

8. $b=47{,}21$, $A=22^\circ\ 16'$, $B=81^\circ\ 42'$.

9. $c=370{,}2$, $B=23^\circ\ 48'$, $C=47^\circ\ 19'$.

Solución. $A=108^\circ\ 53'$, $a=476{,}4$, $b=203{,}2$.

10. $b=0{,}2828$, $B=108^\circ\ 25'$, $C=58^\circ\ 27'$.

Usando las tablas I y III, resolver los triángulos oblicuángulos (problemas 11 a 20) que tienen los siguientes elementos como datos. Comprobar las soluciones.

11. $a=500$, $A=10{,}2^\circ$, $B=46{,}6^\circ$.

Solución. $C=123{,}2^\circ$, $b=2\,051$, $c=2\,363$.

12. $a=45$, $A=36{,}8^\circ$, $C=62^\circ$.

13. $b=5\,685$, $B=48{,}63^\circ$, $C=83{,}26^\circ$.

Solución. $A=48{,}11^\circ$, $a=5\,640$, $c=7\,523$.

14. $b=0{,}6244$, $B=34{,}22^\circ$, $C=80{,}61^\circ$.

15. $a=76{,}08$, $B=126^\circ$, $C=12{,}44^\circ$.

Solución. $A=41{,}56^\circ$, $b=92{,}80$, $c=24{,}70$.

16. $b=129{,}38$, $A=19{,}42^\circ$, $C=64^\circ$.

17. $b=8\,000$, $A=24{,}5^\circ$, $B=86{,}495^\circ$.

Solución. $C=69{,}005^\circ$, $a=3\,324$, $c=7\,483$.

18. $c=9\,500$, $A=2{,}086^\circ$, $B=112^\circ$.

19. $b=2{,}876$, $B=107{,}52^\circ$, $C=62{,}3^\circ$.

Solución. $A=10{,}18^\circ$, $a=0{,}5330$, $c=2{,}670$.

20. $c=10{,}345$, $A=20{,}85^\circ$, $B=111{,}11^\circ$.

21. Una nave situada en el punto S puede ser vista desde cada uno de los puntos A y B de la playa. Por mediciones $AB=800$ m, ángulo $SAB=67^\circ\ 43'$ y ángulo $SBA=74^\circ\ 21'$. Hallar la distancia de la nave al punto A. *Solución.* 1 253 m.

22. Dos observadores en una llanura, separados por una distancia de 5 Km y dándose la cara entre sí, hallan que los ángulos de elevación de un globo situado en el mismo plano vertical que ellos son de 55°

y 58°, respectivamente. Hallar la distancia del globo a cada uno de los observadores.

23. Desde un navío se observa que un faro se encuentra en la dirección 34° al Este del Norte. Después de que el navío se ha movido hacia el Sur una distancia de 3 millas se encuentra que la dirección es 23° al Este del Norte. Hállese la distancia del navío al faro en cada uno de los puntos de observación.

Solución. 6,143 millas; 8,792 millas.

24. Para determinar la distancia de un punto B a un punto inaccesible A, se han medido un segmento BC y los ángulos ABC y BCA, habiéndose obtenido 322,6 metros, 60° 34′ y 56° 10′, respectivamente. Hallar la distancia AB.

CASO II. *Cuando se conocen dos lados y el ángulo opuesto a uno de ellos, como* a, b, A (*caso ambiguo* *).

Primer paso. *Usando la ley de los senos como en el caso I, se calcula log sen* B.

Si log sen $\mathrm{B} = 0$, *sen* $\mathrm{B} = 1$, $\mathrm{B} = 90°$; *es un triángulo rectángulo.*

Si log sen $\mathrm{B} > 0$, *sen* $\mathrm{B} > 1$, *(imposible); no hay solución.*

Si log sen $\mathrm{B} < 0$ y $\mathrm{b} < \mathrm{a}$, *solamente puede usarse el valor agudo de* B *hallado en la tabla; hay una solución.* **

Si log sen $\mathrm{B} < 0$ *y* $\mathrm{b} > \mathrm{a}$, *pueden usarse el valor agudo de* B *hallado en la tabla y su suplemento; hay dos soluciones.* ***

Segundo paso. *Se halla* C *(uno o dos valores según que tengamos uno o dos valores de* B) *de la fórmula*

$$\mathrm{C} = 180° - (\mathrm{A} + \mathrm{B}).$$

* En relación con esto se recomienda al alumno que repase el Artículo 43.

** Porque si $b < a$, B debe ser menor que A, y, por tanto, B debe ser agudo.

*** Como $b > a$, A debe ser agudo, y, por tanto, B puede ser agudo u obtuso.

Tercer paso. *Se halla* c *(uno o dos valores), aplicando la ley de los senos.*

Comprobación. *Se usa la ley de las tangentes.*

EJEMPLO 1. Resolver un triángulo en el que

$$a = 36,\ b = 80,\ A = 28°.$$

Solución. Al intentar construir el triángulo, observamos que es imposible. Para verificar esto, calculamos log sen B.

Despejando sen B de la proporción $\dfrac{a}{\text{sen } A} = \dfrac{b}{\text{sen } B}$, tendremos:

$$\text{sen } B = \frac{b \text{ sen } A}{a},$$

o sea,

$$\log \text{sen } B = \log b + \log \text{sen } A - \log a.$$

$$\begin{aligned} \log b &= 1,9031 \\ \log \text{sen } A &= \underline{9,6716-10} \\ & 11,5747-10 \\ \log a &= \underline{1,5563} \\ \log \text{sen } B &= 10,0184-10 \\ &= 0,0184. \end{aligned}$$

Como log sen $B>0$, sen $B>1$ (lo cual es imposible), lo que nos comprueba que el problema no tiene solución.

EJEMPLO 2. Resolver un triángulo dados

$$a = 7{,}42,\ b = 3{,}39,\ A = 105°.$$

Solución. Sea el triángulo representado en la figura 100.

Primer paso. Por la ley de los senos,

$$\text{sen } B = \frac{b \text{ sen } A}{a},$$

o sea, $\log \operatorname{sen} B = \log b + \log \operatorname{sen} A - \log a.$

$$\begin{aligned}
\log b &= \quad 0,5302 \\
\log \operatorname{sen} A &= \underline{\quad 9,9849-10} \ * \\
& \quad\ 10,5151-10 \\
\log a &= \underline{\quad 0,8704} \\
\log \operatorname{sen} B &= \quad 9,6447-10
\end{aligned}$$

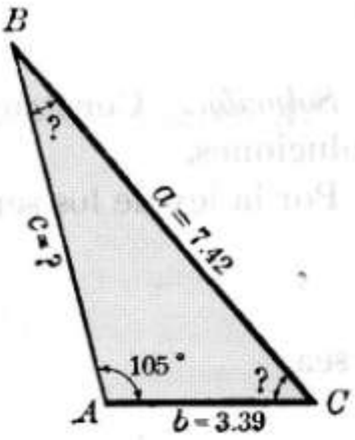


Fig. 100

de donde, $B = 26° \ 11'.$

Usando la tabla II

Como $\log \operatorname{sen} B < 0$ y $b < a$, hay solamente una solución.

Segundo paso. $C = 180° - (A+B) = 180° - 131° \ 11' = 48° \ 49'.$

Tercer paso. Por la ley de los senos,

$$c = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A},$$

o sea, $\log c = \log a + \log \operatorname{sen} C - \log \operatorname{sen} A.$

$$\begin{aligned}
\log a &= \quad 0,8704 \\
\log \operatorname{sen} C &= \underline{\quad 9,8766-10} \\
& \quad\ 10,7470-10 \\
\log \operatorname{sen} A &= \underline{\quad 9,9849-10} \\
\log c &= \quad 0,7621
\end{aligned}$$

de donde, $c = 5,783.$

Comprobación. Usando la ley de las tangentes,

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(C-B) = \frac{c-b}{c+b} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(C+B),$$

o sea, $\log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(C-B) = \log(c-b) + \log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(C+B) - \log(c+b).$

Sustituyendo, hallamos que se satisface esta ecuación.

---

* $\operatorname{Sen} A = \operatorname{sen} 105° = \operatorname{sen}(180° - 105°) = \operatorname{sen} 75°$. Por tanto,

$$\log \operatorname{sen} A = \log \operatorname{sen} 75° = 9,9849 - 10.$$

EJEMPLO 3. Resolver un triángulo en el que

$$a=732, \quad b=1\,015, \quad A=40^\circ.$$

Solución. Construyendo el triángulo (fig. 101) vemos que hay dos soluciones.

Por la ley de los senos,

$$\operatorname{sen} B = \frac{b \operatorname{sen} A}{a},$$

o sea,

$$\log \operatorname{sen} B = \log b + \log \operatorname{sen} A - \log a.$$

$$\begin{aligned} \log b &= 3,0065 \\ \log \operatorname{sen} A &= 9,8081-10 \\ \hline & 12,8146-10 \\ \log a &= 2,8645 \\ \hline \log \operatorname{sen} B &= 9,9501-10. \end{aligned}$$

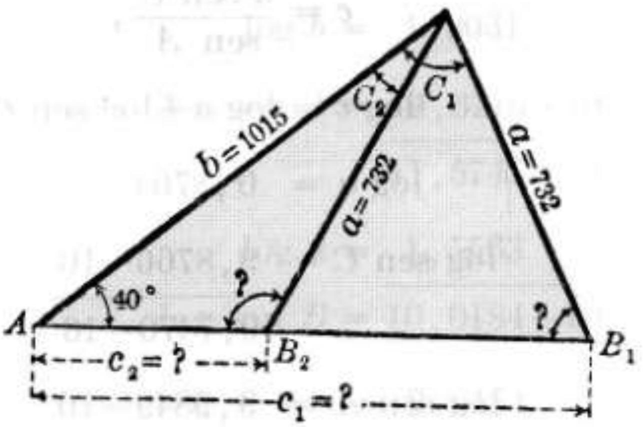


Fig. 101

Como $\log \operatorname{sen} B<0$ y $b>a$, tenemos dos soluciones, lo que comprueba lo que se obtiene en la construcción gráfica. De la tabla II hallamos que el primer valor para B es

$$B_1 = 63^\circ\ 3'.$$

Por tanto, el segundo valor de B es

$$B_2 = 180^\circ - B_1 = 116^\circ\ 57'.$$

$$C_1 = 180^\circ - (A + B_1) = 180^\circ - 103^\circ\ 3' = 76^\circ\ 57'.$$

$$C_2 = 180^\circ - (A + B_2) = 180^\circ - 156^\circ\ 57' = 23^\circ\ 3'.$$

Por la ley de los senos,

$$c_1 = \frac{a \text{ sen } C_1}{\text{sen } A}.$$

o sea,

$$\log c_1 = \log a + \log \text{sen } C_1 - \log \text{sen } A.$$

$$\log a = \ \ 2,8645$$

$$\log \text{sen } C_1 = \ \ 9,9886-10$$

$$12,8531-10$$

$$\log \text{sen } A = \ \ 9,8081-10$$

$$\log c_1 = \ \ 3,0450$$

de donde,

$$c_1 = 1\,109.$$

De la misma manera, de

$$c_2 = \frac{a \text{ sen } C_2}{\text{sen } A}$$

obtenemos

$$c_2 = 445,9.$$

Comprobación. Usese $\text{tg } \frac{1}{2}(C-B) = \frac{c-b}{c+b} \text{ tg } \frac{1}{2}(C+B)$ para ambas soluciones.

PROBLEMAS

En los problemas siguientes úsense las tablas I y II. Determinar el número de soluciones posibles para cada grupo de datos y resolver todos los triángulos posibles.

1. $a=50$, $c=66$, $A=123°\ 11'$. *Solución.* Imposible.

2. $b=3\,069$, $c=1\,223$, $C=55°\ 52'$.

3. $a=32,16$, $c=27,08$, $C=52°\ 24'$.

Solución. $A_1=70°\ 12'$, $B_1=57°\ 24'$, $b_1=28,79$.
$A_2=109°\ 48'$, $B_2=17°\ 48'$, $b_2=10,45$.

4. $a=62,24$, $b=74,83$, $A=27°\ 18'$.

5. $b=0,2337$, $c=0,1982$, $B=109°$.

Solución. $A=17°\ 41'$, $C=53°\ 19'$, $a=0,07508$.

6. $a=975,2$, $b=603,6$, $A=108°\ 54'$.

7. $b=5{,}161$, $c=6{,}840$, $B=44^\circ\ 3'$.

Solución. $A_1=68^\circ\ 47'$, $C_1=67^\circ\ 10'$, $a_1=6{,}920$.
$A_2=23^\circ\ 7'$, $C_2=112^\circ\ 50'$, $a_2=2{,}913$.

8. $a=6{,}061$, $b=7{,}083$, $A=47^\circ\ 25'$.

9. $a=8{,}656$, $c=10$, $A=59^\circ\ 57'$.

Solución. $B=30^\circ\ 3'$, $C=90^\circ$, $b=5{,}009$.

10. $a=107$, $c=171$, $C=31^\circ\ 53'$.

Al resolver los problemas (11 a 20) úsense las tablas I y III. Determinar el número de soluciones posibles para cada grupo de datos y resolver completamente todos los triángulos posibles.

11. $a=55{,}55$, $c=66{,}66$, $C=77{,}7^\circ$.

Solución. $A=54{,}5^\circ$, $B=47{,}8^\circ$, $b=50{,}54$.

12. $a=973{,}5$, $b=612{,}8$, $A=108{,}43^\circ$.

13. $a=72{,}63$, $b=117{,}48$, $A=80^\circ$. *Solución.* Imposible.

14. $b=0{,}0482$, $c=0{,}0621$, $B=57{,}62^\circ$.

15. $a=177$, $b=216$, $A=35{,}6^\circ$.

Solución. $B_1=45{,}27^\circ$, $C_1=99{,}13^\circ$, $c_1=300{,}3$.
$B_2=134{,}73^\circ$, $C_2=9{,}67^\circ$, $c_2=51{,}09$.

16. $b=70{,}71$, $c=78{,}14$, $B=60{,}32^\circ$.

17. $b=91{,}06$, $c=77{,}04$, $B=51{,}12^\circ$.

Solución. $A=87{,}69^\circ$, $C=41{,}19^\circ$, $a=116{,}9$.

18. $a=0{,}1234$, $b=0{,}1412$, $B=38{,}13^\circ$.

19. $a=17\,060$, $b=14\,050$, $B=40^\circ$.

Solución. $A_1=51{,}32^\circ$, $C_1=88{,}68^\circ$, $c_1=21\,850$.
$A_2=128{,}68^\circ$, $C_2=11{,}32^\circ$, $c_2=4\,290$.

20. $b=35{,}36$, $c=39{,}18$, $B=59{,}42^\circ$.

21. Un lado de un paralelogramo tiene 35 m de largo y una diagonal 63 m. Calcular la longitud de la otra diagonal sabiendo que el ángulo formado por las diagonales es de $21^\circ\ 37'$. *Solución.* 124,6 m.

22. Dos boyas están separadas por una distancia de 2 789 m, y un bote está a 4 325 m de una de ellas. El ángulo formado por las visuales del bote a las boyas es de 16° 13′. ¿A qué distancia está el bote de la otra boya? ¿Cuántas soluciones tiene este problema? Si supiéramos que la boya más cercana estaba a 4 325 m del bote, ¿cuántas soluciones tendría el problema?

23. El punto *P* está a 60,5 cm del centro *O* de un círculo cuyo radio es de 24,2 cm. Desde *P* se traza una secante que forma un ángulo de 18° 42′ con la recta *OP*. ¿A qué distancia de *P* está el punto más cercano de intersección de la secante con el círculo?

Solución. 42,85 cm.

24. La distancia de *B* a *C* es 145 m y la de *A* a *C* es 178 m. El ángulo *ABC* es 41° 10′. Calcular la distancia de *A* a *B*.

CASO III. *Cuando se conocen dos lados y el ángulo que forman, como* a, b, C. *

Primer paso. *Se calculan* $a+b$, $a-b$; *también* $\frac{1}{2}(A+B)$ *de* $A+B=180°-C$.

Segundo paso. *De la ley de las tangentes,*

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A-B) = \frac{a-b}{a+b} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A+B),$$

se halla $\frac{1}{2}(A-B)$. *Sumando este resultado a* $\frac{1}{2}(A+B)$ *se obtiene* A, *y restándolo se obtiene* B.

Tercer paso. *Para hallar el lado* c *se aplica la ley de los senos; por ejemplo,*

$$c = \frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A}.$$

---

* En el caso de que se den otros dos lados y el ángulo que forman, basta simplemente cambiar en orden cíclico las letras en todas las fórmulas. Así, si se dan *b, c, A,* se usará

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(B-C) = \frac{b-c}{b+c} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(B+C), \text{ etc.}$$

Comprobación. Se utiliza la ley de los senos, es decir, se mira si*

$$\log a - \log \operatorname{sen} A = \log b - \log \operatorname{sen} B = \log c - \log \operatorname{sen} C.$$

EJEMPLO 1. En un triángulo $a=540$, $b=420$, $C=52° 6'$. Calcular los otros elementos, usando las tablas I y II.

Solución. Al dibujar el triángulo (fig. 102) indicando los elementos conocidos y desconocidos, vemos que el problema corresponde al caso III, ya que se conocen dos lados y el ángulo que forman

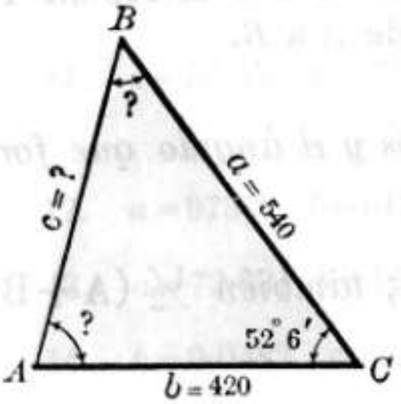


Fig. 102

Primer paso.

$$a = 540 \qquad\qquad 540$$

$$b = \underline{420} \qquad\qquad \underline{420}$$

$$a+b = 960 \qquad\qquad a-b = 120$$

$$180°$$

$$C = \underline{52° 6'}$$

$$A+B = 127° 54'$$

de donde, $\frac{1}{2}(A+B) = 63° 57'$.

Segundo paso. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-B) = \dfrac{a-b}{a+b} \operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+B)$,

$$\log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A-B) = \log(a-b) + \log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A+B) - \log(a+b).$$

$$\log(a-b) = 2,0792$$

$$\log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A+B) = \underline{10,3108-10}$$

$$12,3900-10$$

$$\log(a+b) = \underline{2,9823}$$

$$\log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A-B) = 9,4077-10$$

---

* De la ley de los senos, $\dfrac{a}{\operatorname{sen} A} = \dfrac{b}{\operatorname{sen} B} = \dfrac{c}{\operatorname{sen} C}$.

de donde, $\frac{1}{2}(A-B) = 14° 21'$.

$$\frac{1}{2}(A+B) = 63° 57' \qquad 63° 57'$$
$$\frac{1}{2}(A-B) = 14° 21' \qquad \underline{14° 21'}$$

Sumando, $A = 78° 18'$ **Restando,** $B = 49° 36'$.

Tercer paso. $c = \dfrac{a \text{ sen } C}{\text{sen } A}$. De $\dfrac{c}{\text{sen } C} = \dfrac{a}{\text{sen } A}$

$$\log c = \log a + \log \text{sen } C - \log \text{sen } A.$$

$$\begin{aligned} \log a &= 2,7324 \\ \log \text{sen } C &= \underline{9,8971-10} \\ & 12,6295-10 \\ \log \text{sen } A &= \underline{9,9909-10} \\ \log c &= 2,6386 \end{aligned}$$

de donde, $c = 435,1$.

Comprobación. Por la ley de los senos,

$$\begin{aligned} \log a &= 12,7324-10 \qquad & \log b &= 12,6232-10 \\ \log \text{sen } A &= \underline{9,9909-10} & \log \text{sen } B &= \underline{9,8817-10} \\ & 2,7415 & & 2,7415 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log c &= 12,6386-10 \\ \log \text{sen } C &= \underline{9,8971-10} \\ & 2,7415. \end{aligned}$$

EJEMPLO 2. Usando las tablas I y III resolver un triángulo dados $a=167$, $c=82$, $B=98°$.

Solución. Primer paso.

$$\begin{aligned} a &= 167 \qquad & & 167 \qquad & & 180° \\ c &= \underline{82} & & \underline{82} & B &= \underline{98°} \\ a+c &= 249 & a-c &= 85 & A+C &= 82° \end{aligned}$$

$$\frac{1}{2}(A+C) = 41°.$$

Segundo paso. $\operatorname{tg} \frac{1}{2}(A-C) = \dfrac{a-c}{a+c} \operatorname{tg} \frac{1}{2}(A+C),$

$$\log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A-C) = \log (a-c) + \log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A+C) - \log (a+c).$$

$$\begin{aligned} \log (a-c) &= 1,9294 \\ \log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A+C) &= \underline{9,9392-10} \\ &\ 11,8686-10 \\ \log (a+c) &= \underline{2,3962} \\ \log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}(A-C) &= 9,4724-10 \end{aligned}$$

de donde, $\frac{1}{2}(A-C) = 16,53°.$

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2}(A+C) &= 41,00° & & 41,00° \\ \tfrac{1}{2}(A-C) &= \underline{16,53°} & & \underline{16,53°} \end{aligned}$$

Sumando, $A = 57,53°$. Restando, $C = 24,47°$.

Tercer paso. $b = \dfrac{a \operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A}$. De $\dfrac{b}{\operatorname{sen} B} = \dfrac{a}{\operatorname{sen} A}$

$$\log b = \log a + \log \operatorname{sen} B - \log \operatorname{sen} A.$$

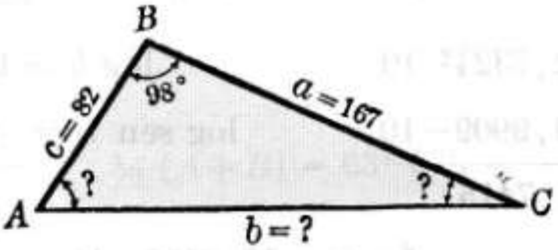


Fig. 103

$$\begin{aligned} \log a &= 2,2227 \\ \log \operatorname{sen} B &= \underline{9,9958-10}\ * \\ &\ 12,2185-10 \\ \log \operatorname{sen} A &= \underline{9,9262-10} \\ \log b &= 2,2923 \end{aligned}$$

de donde, $b = 196.$

---

* $\operatorname{Sen} B = \operatorname{sen} 98° = \operatorname{sen}(180° - 98°) = \operatorname{sen} 82°$. De donde,

$$\log \operatorname{sen} 98° = \log \operatorname{sen} 82° = 9,9958-10.$$

Comprobación. Por la ley de los senos,

$$\log a = 12,2227-10 \qquad \log b = 12,2923-10$$

$$\log \operatorname{sen} A = \underline{\ 9,9262-10\ } \qquad \log \operatorname{sen} B = \underline{\ 9,9958-10\ }$$

$$2,2965 \qquad 2,2965$$

$$\log c = 11,9138-10$$

$$\log \operatorname{sen} C = \underline{\ 9,6172-10\ }$$

$$2,2966$$

resultados que sustancialmente concuerdan.

PROBLEMAS

Usando las tablas I y II, resolver los siguientes triángulos y comprobar las soluciones.

1. $a=27$, $c=15$, $B=46°$.

   Solución. $A=100°\ 57'$, $C=33°\ 3'$, $b=19{,}785$.

2. $a=486$, $b=347$, $C=51°\ 36'$.

3. $b=2{,}302$, $c=3{,}567$, $A=62°$.

   Solución. $B=39°\ 16'$, $C=78°\ 44'$, $a=3{,}211$.

4. $a=597{,}3$, $c=702{,}4$, $B=39°\ 42'$.

5. $a=77{,}99$, $b=83{,}39$, $C=72°\ 16'$.

   Solución. $A=51°\ 14{,}5'$, $B=56°\ 29{,}5'$, $c=95{,}24$.

6. $b=0{,}8782$, $c=0{,}4973$, $A=32°\ 24'$.

7. $b=1\,192{,}1$, $c=356{,}3$, $A=26°\ 16'$.

   Solución. $B=143°\ 29'$, $C=10°\ 15'$, $a=886{,}6$.

8. $a=88{,}79$, $b=15{,}13$, $C=110°\ 22'$.

9. $a=51{,}38$, $c=67{,}94$, $B=79°\ 13'$.

   Solución. $A=40°\ 53'$, $C=59°\ 55'$, $b=77{,}12$.

10. $b=4\,625$, $c=5\,484$, $A=4°\ 16{,}2'$.

11. $b=0{,}02668$, $c=0{,}05092$, $A=115°\ 47'$.
Solución. $B=21°\ 1'$, $C=43°\ 12'$, $a=0{,}0670$.

12. $a=87{,}91$, $b=9{,}464$, $C=4°\ 56'$.

Usando las tablas I y III, resolver los triángulos de los problemas 13 a 22. Compruébense las soluciones.

13. $a=17$, $b=12$, $C=59{,}3°$.
Solución. $A=77{,}2°$, $B=43{,}5°$, $c=14{,}99$.

14. $b=101$, $c=158$, $A=37{,}38°$.

15. $a=0{,}0850$, $c=0{,}0042$, $B=56{,}5°$.
Solución. $A=121{,}07°$, $C=2{,}43°$, $b=0{,}08274$.

16. $b=3{,}272$, $c=2{,}854$, $A=79{,}32°$.

17. $b=0{,}9486$. $c=0{,}8852$, $A=84{,}6°$.
Solución. $B=49{,}88°$, $C=45{,}52°$, $a=1{,}235$.

18. $a=21{,}82$, $b=48{,}27$, $C=12{,}23°$.

19. $a=42\,930$, $c=73\,480$, $B=24{,}8°$.
Solución. $A=27{,}56°$, $C=127{,}64°$, $b=38\,920$.

20. $a=500{,}2$, $c=700{,}7$, $B=111{,}11°$.

21. $a=5{,}767$, $b=8{,}323$, $C=124{,}33°$.
Solución. $A=22{,}37°$, $B=33{,}30°$, $c=12{,}513$.

22. $b=70{,}25$, $c=5{,}632$, $A=66{,}66°$.

23. Para hallar la distancia entre dos objetos, A y B, separados por un lago, se ha escogido una estación C y se han medido las distancias CA y CB que son de 3 825 m y 3 476 m, respectivamente. Se observó también que el ángulo ACB es de $62°\ 31'$. Calcular la distancia de A a B. *Solución.* 3 801 m.

24. Desde un punto que dista 3 Km de uno de los extremos de una isla y 7 Km del otro extremo se ve la isla bajo un ángulo de $33°\ 56'$. Calcular el largo de dicha isla.

25. En un paralelogramo las dos diagonales miden 5 m y 6 m y forman un ángulo de $49°\ 18'$. Calcular los lados del paralelogramo.
Solución. 5,005 m, 2,339 m.

26. Los lados de un paralelogramo miden 172,43 y 101,31 m, respectivamente, y el ángulo formado por ellos es de $61° 16'$. Hallar lás longitudes de las diagonales.

27. Dos yates parten al mismo tiempo del mismo punto. Uno se dirige hacia el Norte a la velocidad de 10,44 millas por hora, y el otro hacia el Nordeste á la velocidad de 7,71 millas por hora. ¿A qué distancia se hallan después de 40 minutos? *Solución.* 4,928 millas.

28. Hallar la dirección del yate más lento con respecto al yate más rápido en el problema 27.

CASO IV. *Cuando se conocen los tres lados* a, b, c.

Primer paso. *Se calculan*

$$s = \tfrac{1}{2}(a+b+c), \quad s-a, \quad s-b, \quad s-c.$$

Segundo paso. *Se halla* log r *de*

$$r = \sqrt{\frac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}.$$

(55) a **(58)** (Art. 46).

Tercer paso. *Se hallan los ángulos* A, B, C *de*

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A = \frac{r}{s-a}, \quad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} B = \frac{r}{s-b}, \quad \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C = \frac{r}{s-c}.$$

Comprobación. ***Véase si*** $A+B+C=180°$.

EJEMPLO. Resolver un triángulo cuyos lados miden

$$a=51, \quad b=65, \quad c=20.$$

Solución. Primer paso.

$a = 51$	Por tanto:		
$b = 65$	$s = 68$	$s = 68$	$s = 68$
$c = 20$	$a = 51$	$b = 65$	$c = 20$
$2s = 136$	$s-a = 17$	$s-b = 3$	$s-c = 48.$
$s = 68.$			

Segundo paso. $r = \sqrt{\dfrac{(s-a)(s-b)(s-c)}{s}}$,

$$\log r = \tfrac{1}{2}[\log(s-a)+\log(s-b)+\log(s-c)-\log s].$$

De las tablas de logaritmos,

$$\begin{aligned} \log(s-a) &= 1,2304 \\ \log(s-b) &= 0,4771 \\ \log(s-c) &= 1,6812 \\ \hline &\ 3,3887 \\ \log s &= 1,8325 \\ \hline 2)&\ \underline{1,5562} \\ \log r &= 0,7781. \end{aligned}$$

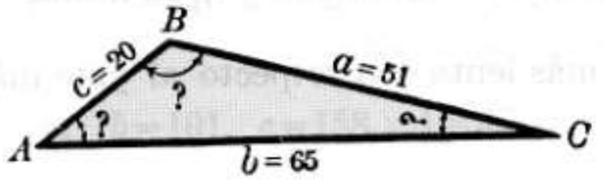


Fig. 104

Tercer paso. De la fórmula $\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A = \dfrac{r}{s-a}$,

$$\log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A = \log r - \log(s-a).$$

$$\begin{aligned} \log r &= 10,7781-10 \\ \log(s-a) &= 1,2304 \\ \hline \log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} A &= 9,5477-10 \end{aligned}$$

$\tfrac{1}{2} A = 19° 27'$, usando la tabla II *

$A = 38° 54'$.

De la fórmula $\operatorname{tg} \tfrac{1}{2} B = \dfrac{r}{s-b}$,

$$\log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} B = \log r - \log(s-b).$$

$$\begin{aligned} \log r &= 10,7781-10 \\ \log(s-b) &= 0,4771 \\ \hline \log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} B &= 10,3010-10 \end{aligned}$$

$\tfrac{1}{2} B = 63° 26'$, usando la tabla II

$B = 126° 52'$.

---

* Si usamos la tabla III en vez de la II, obtenemos

$\tfrac{1}{2} A = 19,44°$, $\tfrac{1}{2} B = 63,43°$, $\tfrac{1}{2} C = 7,12°$.
$A = 38,88°$, $B = 126,86°$, $C = 14,24°$.

Comprobación. $A+B+C = 179,98°$.

De la fórmula $\operatorname{tg} \frac{1}{2} C = \dfrac{r}{s-c}$,

$$\log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C = \log r - \log (s-c).$$

$$\begin{aligned} \log r &= 10,7781-10 \\ \log (s-c) &= \underline{\ \ 1,6812\ \ \ \ \ \ \ } \\ \log \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} C &= \ \ 9,0969-10 \\ \tfrac{1}{2} C &= \ \ 7^\circ\ \ 8', \end{aligned}$$ usando la tabla II

$$C = 14^\circ\ 16'.$$

Comprobación.

$$\begin{aligned} A &= \ \ 38^\circ\ 54' \\ B &= 126^\circ\ 52' \\ C &= \underline{\ \ 14^\circ\ 16'} \\ A+B+C &= 180^\circ\ \ 2'. \end{aligned}$$

PROBLEMAS

Usando las tablas I y II, resolver los siguientes triángulos y comprobar las soluciones:

1. $a=2$, $b=3$, $c=4$.

Solución. $A=28^\circ\ 58'$, $B=46^\circ\ 34'$, $C=104^\circ\ 28'$.

2. $a=2{,}50$, $b=2{,}79$, $c=2{,}33$.

3. $a=5{,}6$; $b=4{,}3$, $c=4{,}9$.

Solución. $A=74^\circ\ 40'$, $B=47^\circ\ 46'$, $C=57^\circ\ 34'$.

4. $a=111$, $b=145$, $c=40$.

5. $a=0{,}321$, $b=0{,}361$, $c=0{,}402$.

Solución. $A=49^\circ\ 24'$, $B=58^\circ\ 38'$, $C=71^\circ\ 58'$.

6. $a=168{,}3$, $b=205{,}2$, $c=291{,}8$.

7. $a=3\,019$, $b=6\,731$, $c=4\,228$.

Solución. $A=18^\circ\ 12'$, $B=135^\circ\ 51'$, $C=25^\circ\ 57'$.

8. $a=68{,}23$, $b=39{,}72$, $c=41{,}26$.

9. $a=513{,}4$, $b=726{,}8$, $c=931{,}3$.
Solución. $A=33°\ 16'$, $B=50°\ 56'$, $C=95°\ 48'$.

10. $a=7{,}440$, $b=9{,}063$, $c=6{,}181$.

Usando las tablas I y III, resolver los triángulos de los problemas 11 a 18 y comprobar las soluciones:

11. $a=4$, $b=7$, $c=6$.
Solución. $A=34{,}78°$, $B=86{,}42°$, $C=58{,}82°$.

12. $a=0{,}43$, $b=0{,}50$, $c=0{,}57$.

13. $a=61{,}3$, $b=84{,}7$, $c=47{,}6$.
Solución. $A=45{,}20°$, $B=101{,}38°$, $C=33{,}44°$.

14. $a=328{,}6$, $b=422{,}4$, $c=643{,}2$.

15. $a=30{,}19$, $b=67{,}31$, $c=42{,}28$.
Solución. $A=18{,}20°$, $B=135{,}86°$, $C=25{,}94°$.

16. $a=8\,001$, $b=7\,002$, $c=9\,003$.

17. $a=0{,}0291$, $b=0{,}0184$, $c=0{,}0358$.
Solución. $A=54{,}06°$, $B=30{,}80°$, $C=95{,}16°$.

18. $a=6{,}727$, $b=3{,}871$, $c=4{,}032$.

19. Los lados de un campo triangular son de 700 m, 1 100 m y 960 m de largo. Hallar el ángulo opuesto al mayor lado.
Solución. $81°\ 22'$.

20. Hallar el ángulo más pequeño del triángulo cuyos lados son 1,68 m, 2,04 m y 2,91 m.

21. ¿Bajo qué ángulo se ve la fachada de un edificio de 7 m de largo, cuando el ojo del observador está a 5 m de uno de los extremos y a 8 m del otro?
Solución. 60°.

22. El punto P está a 135,81 m de un extremo de una pared de 123,42 m de largo y a 100,25 m del otro extremo. ¿Bajo qué ángulo se ve la pared desde el punto P?

23. Dos lados de un paralelogramo miden 52,1 m y 68,5 m, respectivamente. La longitud de la diagonal más corta es 31,6 m. Hallar la longitud de la diagonal más larga.
Solución. 117,5 m.

24. Las diagonales de un paralelogramo miden 842 m y 1 426 m. El lado más corto mide 824 m. Hállese la longitud del lado más largo.

67. Empleo de los logaritmos para hallar el área de un triángulo oblicuángulo. Del Artículo 47, tenemos los tres casos siguientes:

CASO I. *Cuando se conocen dos lados y el ángulo que forman se usa una de las fórmulas*

$$S = \frac{ab \text{ sen } C}{2}, \quad S = \frac{bc \text{ sen } A}{2}, \quad S = \frac{ac \text{ sen } B}{2},$$

en donde $S =$ *área del triángulo.*

EJEMPLO 1. Hallar el área de un triángulo en el que

$$a = 25{,}6, \quad b = 38{,}2, \quad C = 41^\circ\ 56'.$$

Solución.

$$S = \frac{ab \text{ sen } C}{2}.$$

$$\log S = \log a + \log b + \log \text{sen } C - \log 2.$$

$$\begin{aligned}
\log a &= 1{,}4082 \\
\log b &= 1{,}5821 \\
\log \text{sen } C &= \underline{9{,}8249 - 10} \\
& 12{,}8152 - 10 \\
\log 2 &= \underline{0{,}3010} \\
\log S &= 12{,}5142 - 10 \\
&= 2{,}5142.
\end{aligned}$$

de donde,

$$S = 326{,}8.$$

CASO II. *Cuando se conocen los tres lados se usa la fórmula*

$$S = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$$

en donde, $S =$ *área del triángulo,*

y $s = \frac{1}{2}(a+b+c).$

Ejemplo 2. Hallar el área de un triángulo que tiene por lados,

$$a=12{,}53, \quad b=24{,}9, \quad c=18{,}91.$$

Solución.

$$\begin{array}{llll} a = 12{,}53. & \text{Por tanto,} & & \\ b = 24{,}9 & s = 28{,}17 & s = 28{,}17 & s = 28{,}17 \\ c = \underline{18{,}91} & a = \underline{12{,}53} & b = \underline{24{,}9} & c = \underline{18{,}91} \\ 2s = 56{,}34 & s-a = 15{,}64 & s-b = 3{,}27 & s-c = 9{,}26 \\ s = 28{,}17. & & & \end{array}$$

$$S = \sqrt{s(s-a)\,(s-b)\,(s-c)}.$$

$$\log S = \tfrac{1}{2}[\log s + \log(s-a) + \log(s-b) + \log(s-c)].$$

$$\begin{aligned} \log s &= 1{,}4498 \\ \log(s-a) &= 1{,}1942 \\ \log(s-b) &= 0{,}5145 \\ \log(s-c) &= 0{,}9666 \\ 2\,)\; & \underline{4{,}1251} \\ \log S &= 2{,}0626 \end{aligned}$$

de donde, $S = 115{,}5.$

Caso III. *Los problemas sobre áreas que no quedan incluídos directamente en los casos I o II pueden resolverse por el caso I si se halla primero un lado o un ángulo por la ley de los senos.*

Ejemplo 3. Hallar el área de un triángulo dados

$$A=34^\circ\ 22', \quad B=66^\circ\ 11', \quad c=78{,}35.$$

Solución. Este problema no queda directamente comprendido ni en el caso I ni en el II. Pero

$$C=180^\circ-(A+B)=180^\circ-100^\circ\ 33'=79^\circ\ 27'.$$

Y, por la ley de los senos,

$$a=\frac{c \text{ sen } A}{\text{sen } C}.$$

Tomando logaritmos, $\log a = \log c + \log \operatorname{sen} A - \log \operatorname{sen} C.$

$$\begin{aligned} \log c &= 1{,}8941 \\ \log \operatorname{sen} A &= \underline{9{,}7517-10} \\ &\quad 11{,}6458-10 \\ \log \operatorname{sen} C &= \underline{9{,}9926-10} \\ \log a &= 1{,}6532. \end{aligned}$$

Ahora ya queda incluído en el caso I.

$$S = \frac{ac \operatorname{sen} B}{2}.$$

Tomando logaritmos, $\log S = \log a + \log c + \log \operatorname{sen} B - \log 2.$

$$\begin{aligned} \log a &= 1{,}6532 \\ \log c &= 1{,}8941 \\ \log \operatorname{sen} B &= \underline{9{,}9614-10} \\ &\quad 13{,}5087-10 \\ \log 2 &= \underline{0{,}3010} \\ \log S &= 13{,}2077-10 \\ &= 3{,}2077, \end{aligned}$$

de donde, $S = 1\,613.$

PROBLEMAS

Hallar las áreas de los siguientes triángulos. Usense las tablas I y II para los problemas 1 a 10, y las tablas I y III para los problemas 11 a 18.

1. $a=38{,}0,\ c=61{,}2,\ B=67^\circ\ 56'.$ *Solución.* 1 078.
2. $b=116{,}1,\ c=100{,}0,\ A=118^\circ\ 16'.$
3. $b=2{,}07,\ A=70^\circ,\ B=36^\circ\ 23'.$ *Solución.* 3,257.
4. $a=3{,}123,\ A=53^\circ\ 11',\ B=13^\circ\ 57'.$
5. $a=0{,}3228,\ c=0{,}9082,\ B=60^\circ\ 16'.$ *Solución.* 0,1273.
6. $a=86{,}84,\ b=73{,}41,\ C=56^\circ\ 31'.$

7. $a=95{,}0,\ b=142{,}8,\ c=89{,}6.$ *Solución.* 4 174.

8. $a=6{,}295,\ b=3{,}093,\ c=4{,}123.$

9. $a=18{,}063,\ A=96°\ 30',\ B=35°.$ *Solución.* 70,55.

10. $b=62{,}83,\ c=40{,}95,\ B=28°\ 19'.$

11. $a=100,\ B=60{,}25°,\ C=54{,}5°.$ *Solución.* 3 891.

12. $c=2{,}35,\ A=30{,}21°,\ B=46{,}42°.$

13. $a=145,\ b=178,\ B=41{,}17°.$ *Solución.* 12 380.

14. $b=28{,}51,\ c=40{,}23,\ C=77{,}76°.$

15. $a=23{,}1,\ b=19{,}7,\ c=25{,}2.$ *Solución.* 215,9.

16. $a=7{,}464,\ b=9{,}326,\ c=10{,}937.$

17. $a=960,\ b=720,\ C=25{,}67°.$ *Solución.* 149 700.

18. $b=0{,}6275,\ c=0{,}4921,\ A=121{,}32°.$

19. Hallar el área del macizo de flores circular más grande que puede hacerse en un prado triangular cuyos lados miden 124,62 m, 40,86 m y 97,92 m. *Solución.* 518,2 m².

20. El área de un terreno de forma triangular es de 4 000 m² y dos de sus lados miden 127 m y 150 m. Calcular el ángulo formado por los dos lados dados.

21. El lado AB de un campo $ABCD$ mide 37 Hm, BC mide 63 Hm y DA mide 20 Hm. Las diagonales AC y BD miden 75 Hm y 42 Hm, respectivamente. Hallar el área del campo.

Solución. 1 570 Hm².

22. En un campo $ABCD$ los lados AB, BC, CD y DA miden 155 m, 236 m, 252 m y 105 m, respectivamente. La diagonal AC mide 311 m. Calcular el área del campo.

68. Medida de áreas de terrenos. El siguiente ejemplo muestra la naturaleza de las medidas que realiza el topógrafo para determinar áreas de terrenos, y el método generalmente empleado para calcular el área a partir de los datos medidos.

Las cadenas y cintas metálicas usadas por los topógrafos y agrimensores tienen 10 ó 20 metros de longitud. En EE. UU. se usa la cadena Gunter de 66 pies, y el área suele entonces expresarse en acres que equivale a 10 cadenas cuadradas.

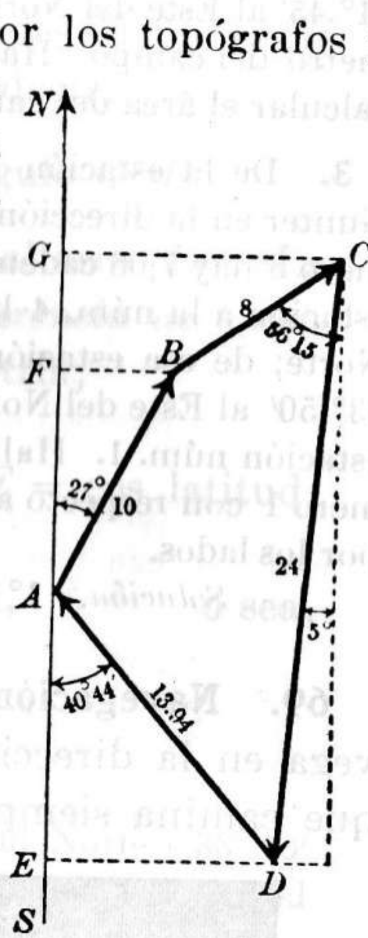


Fig. 105

Ejemplo. Un topógrafo usando la cadena Gunter y partiendo de un punto A mide 10 cadenas en la dirección 27° al Este del Norte hasta B, de allí, en la dirección que forma un ángulo de 56° 15′ hacia el Este con la dirección Norte, se miden 8 cadenas hasta C; de allí, en la dirección 5° al Oeste del Sur, 24 cadenas hasta D, y de allí en la dirección 40° 44′ al Oeste del Norte, 13,94 cadenas hasta A. Calcular en acres el área del campo $ABCD$.

Solución. Sea la figura 105 una representación aproximada del campo. Por el punto extremo izquierdo del campo trácese la línea Norte-Sur. De la figura resulta: área $ABCD$= área del trapecio * $GCDE$ − (área del trapecio $GCBF$ + área del triángulo FBA + área del triángulo ADE) = 13,9 acres.

PROBLEMAS

1. Un topógrafo mide en dirección 50° 25′ al Este del Sur 120,8 m; de allí en la dirección 58° 10′ al Oeste del Sur, 83 m; de allí, formando un ángulo de 28° 12′ al Oeste del Norte, 102 m, y de allí va al punto de partida. Determinar la dirección y distancia del punto de partida con respecto a la última estación, y hallar el área del campo encerrado por el polígono. *Solución.* 39° 44′ al Este del Norte; 40 m; 6 640 m².

2. Un lado de un campo tiene la dirección 83° 30′ al Oeste del Norte y mide 210 m; el segundo lado tiene la dirección 22° 15′ al Oeste del Sur y mide 233,40 m; el tercer lado está en la dirección

* Por Geometría el área de un trapecio es igual a la mitad de la suma de las bases por la altura. Así, área $GCDE = \frac{1}{2}(GC+ED)GE$.

71° 45′ al Este del Norte y mide 258 m, y el cuarto lado completa el perímetro del campo. Hallar la longitud y la dirección del cuarto lado y calcular el área del campo.

3. De la estación núm. 1 a la estación núm. 2 hay 4,57 cadenas Gunter en la dirección 7° 20′ al Oeste del Sur; de esa estación a la número 3 hay 7,06 cadenas en la dirección 61° 55′ al Oeste del Sur, de esa estación a la núm. 4 hay 5,06 cadenas en la dirección 3° 10′ al Este del Norte; de esa estación a la núm. 5 hay 3,25 cadenas en la dirección 33° 50′ al Este del Norte, y de esta estación se cierra el polígono con la estación núm. 1. Hallar la dirección y la distancia de la estación número 1 con respecto a la núm. 5, y calcular el área del campo limitado por los lados.

Solución. 1° 16′ al Norte del Este; 4,7 cadenas; 3,55 acres.

69. Navegación sobre paralelos. Cuando un buque navega en la dirección Este o en la dirección Oeste, es decir, que camina siempre sobre el mismo paralelo de latitud, se

Fig. 106

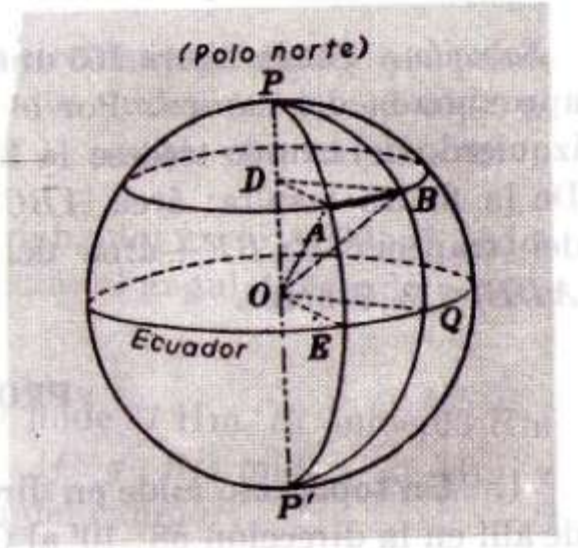


Fig. 107

dice que *navega sobre paralelos*. La distancia recorrida se llama *desviación** (en inglés *departure*) y se expresa en millas mari-

* La *desviación* entre dos meridianos es un arco de paralelo comprendido entre esos meridianos. Disminuye a medida que aumenta la latitud. En (61), la diferencia de longitud debe estar expresada en minutos.

nas *. Así, en la figura 107 el arco AB es la desviación entre A y B. La latitud de A y B es la misma; es decir,

$$\text{arco } EA = \text{arco } QB, \quad \text{ángulo } EOA = \text{ángulo } QOB.$$

La diferencia de longitud de A y B es igual al arco EQ. La relación entre la *latitud*, la *desviación* y la *diferencia de longitud*, puede hallarse como sigue: Por Geometría,

$$\frac{\text{arco } AB}{\text{arco } EQ} = \frac{DA}{OE} = \frac{DA}{OA} = \cos OAD = \cos AOE = \cos \text{latitud},$$

de donde, $\quad \text{arco } AB = \text{arco } EQ \cos \text{latitud}, \quad$ o sea,

$$\text{(61)} \qquad \text{Dif. long.} = \frac{\text{desviación}}{\text{cos latitud}}.$$

Ejemplo. Un navío cuya posición es 25° 20′ latitud Norte y 36° 10′ longitud Oeste, navega hacia el Oeste 140 millas. Calcular la longitud del lugar en que se encuentra después del recorrido.

Solución. Aquí, $\quad$ desviación = 140,

y $\quad$ latitud = 25° 20′ N.

Sustituyendo en la fórmula anterior (61),

$$\text{dif. long.} = \frac{140}{\cos 25^\circ\, 20'}.$$

$$\begin{aligned} \log 140 &= 12{,}1461-10 \\ \log \cos 25^\circ\, 20' &= \underline{\ 9{,}9561-10} \\ \log \text{dif. long.} &= \ 2{,}1900 \\ \text{dif. long.} &= 154{,}9' = 2^\circ\, 34{,}9'. \end{aligned}$$

Por tanto, la longitud del lugar alcanzado = 36° 10′ + 2° 34,9′
= 38° 44,9′ Oeste.

---

* Una *milla marina o náutica*, llamada también milla geográfica, es la longitud de un arco de un minuto medida sobre un círculo máximo de la Tierra. En los problemas sobre navegación las distancias vienen dadas en millas marinas.

PROBLEMAS

1. Un buque que está a 42° 16′ latitud Norte y 72° 16′ longitud Oeste, navega hacia el Este una distancia de 149 millas. ¿Cuál es la posición alcanzada? *Solución.* 68° 55′ longitud Oeste.

2. Un buque cuya posición es 44° 49′ latitud Sur y 119° 42′ longitud Este navega hacia el Oeste hasta alcanzar la longitud 117° 16′ E. Hallar la desviación.

3. Un navío cuya posición es 36° 48′ latitud Norte y 56° 15′ longitud Oeste navega hacia el Este 226 millas. Hállese la longitud del lugar alcanzado. *Solución.* 51° 33′ longitud Oeste.

4. Un vapor que está a 48° 54′ latitud Norte y 10° 55′ longitud Oeste, navega hacia el Oeste hasta los 15° 12′ longitud Oeste. Hallar la distancia navegada.

70. Navegación considerando la Tierra plana. Cuando un buque navega de tal manera que su trayectoria forma con todos los meridianos un mismo ángulo, se dice que navega siguiendo una *ruta loxodrómica*. El ángulo se llama *rumbo* y la *distancia* entre dos lugares se mide sobre la loxodrómica. Así, por ejemplo, si un buque va de A a B (fig. 108) sobre una loxodrómica, tendremos:

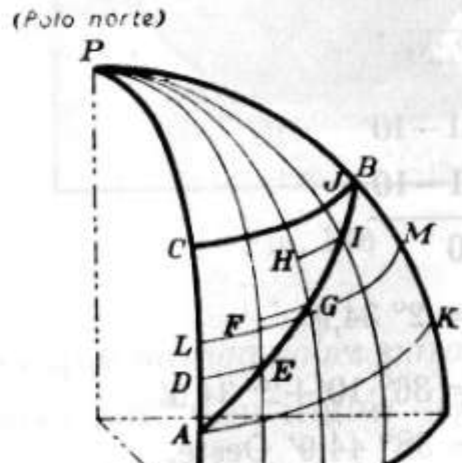


Fig. 108

arco AB = distancia,

ángulo CAB = rumbo,

arco CB = desviación,

arco AC = diferencia de latitud entre A y B.

Se puede obtener una relación aproximada entre las magnitudes anteriores, considerando la superficie de la Tierra como una superficie *plana*, es decir, considerando ACB como un triángulo rectángulo plano, siendo ACB el ángulo recto. Este triángulo rectángulo se llama *triángulo plano de navegación*.

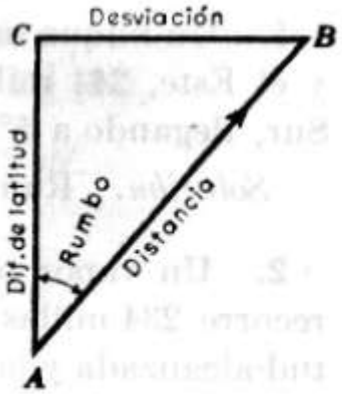


Fig. 109

De este triángulo rectángulo plano (fig. 109), obtenemos:

$$CB = AB \text{ sen } A,$$

$$AC = AB \cos A; \qquad \text{o sea,}$$

(62) **Desviación = distancia × sen rumbo,**

(63) **Dif. lat. = distancia × cos rumbo.**

Si AB es grande, el error cometido por despreciar la curvatura de la Tierra será demasiado grande y los resultados obtenidos se apartarán mucho de la realidad. En este caso, AB puede ser dividida en partes, tales como AE, EG, GI, IB (fig. 108) que sean tan pequeñas que la curvatura de la Tierra sea despreciable. La navegación plana no suministra ninguna solución para la diferencia en longitud. En (63), la dif. latitud debe estar expresada en minutos.

Ejemplo. Un buque que navega hacia el Norte desde un punto de 8° 45′ latitud Sur con rumbo 36° E, recorre 345 millas. Hallar la latitud alcanzada y la desviación.

Solución. Como en este caso la distancia = 345 y el rumbo = 36°, tendremos:

$$\text{desviación} = 345 \text{ sen } 36°. \qquad \text{dif. lat.} = 345 \cos 36°.$$

$$\begin{array}{rlrl} \log 345 &= 2{,}5378 & \log 345 &= 2{,}5378 \\ \log \text{sen } 36° &= 9{,}7692-10 & \log \cos 36° &= 9{,}9080-10 \\ \hline \log \text{desviación} &= 2{,}3070 & \log \text{dif. lat.} &= 2{,}4458 \\ \text{desviación} &= 202{,}8 \text{ millas.} & \text{dif. lat.} &= 279{,}1' = 4° \; 39{,}1'. \end{array}$$

Como el buque navega hacia el Norte, habrá alcanzado la latitud 8° 45′ − 4° 39,1′ = 4° 5,9′ S.

PROBLEMAS

1. Un buque navega, siguiendo una ruta comprendida entre el Sur y el Este, 244 millas partiendo de un lugar situado a 2° 52′ latitud Sur, llegando a 5° 8′ latitud Sur. Hallar el rumbo y la desviación.

Solución. Rumbo 56° 8′ al Este del Sur; desviación = 202,6 millas.

2. Un vapor partiendo de un punto situado a 43° 45′ latitud Sur, recorre 234 millas con rumbo 11° 15′ al Este del Norte. Hallar la latitud alcanzada y la desviación sufrida.

71. Navegación sobre paralelo intermedio. Aquí tomamos la desviación determinada por **(62)** medida sobre el paralelo de latitud media entre los paralelos del punto de partida y el de llegada. Así, en la figura 108 la desviación entre A y B es LM, medida sobre el paralelo equidistante de los paralelos de A y B. Esto será suficientemente exacto para los fines ordinarios si el recorrido no es de gran longitud ni se aleja mucho del ecuador. La *latitud media* es el promedio de las latitudes de A y B. La fórmula **(61)** del Artículo 69 se convertirá entonces en

$$\textbf{(64)} \qquad \text{dif. long.} = \frac{\text{desviación}}{\text{cos lat. med.}}.$$

Ejemplo. Un buque cuya posición es 42° 30′ latitud Norte y 58° 51′ longitud Oeste, navega 300 millas en la dirección 33° 45′ al Este del Sur. Hallar la latitud y longitud de la posición alcanzada.

Solución. Conocemos la latitud del punto de partida A. Para obtener la latitud de la posición final B, hallamos primero la diferencia de latitud por medio de **(63)**. Tendremos:

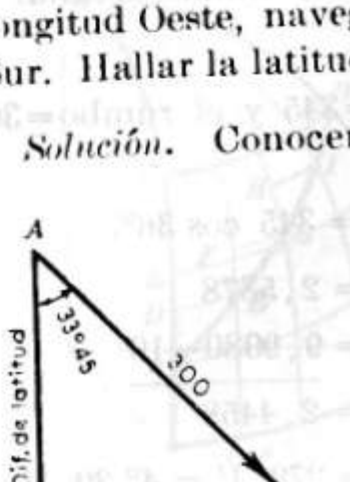


Fig. 110

$$\text{dif. lat.} = 300 \cos 33°\ 45'.$$

$$\log 300 = 2,4771$$

$$\log \cos 33°\ 45' = 9,9198-10$$

$$\log \text{dif. lat} = 2,3969$$

$$\text{dif. lat.} = 249.4' = 4°\ 9.4'$$

Como el buque navega hacia el Sur, habrá alcanzado después del recorrido la latitud$=42° 30'-4° 9,4'=38° 20,6'$ N.

Para obtener la longitud de B, debemos calcular primero la desviación y la latitud media para sustituirlos en (**64**). De (**62**),

$$\text{desviación} = 300 \text{ sen } 33° 45'.$$

$$\begin{aligned} \log 300 &= 2,4771 \\ \log \text{sen } 33° 45' &= 9,7448-10 \\ \hline \log \text{desviación} &= 2,2219 \end{aligned}$$

$$\text{desviación} = 166,7'.$$

$$\text{Latitud media} = \tfrac{1}{2}(42° 30' + 38° 20,6') = 40° 25,3'.$$

Sustituyendo en (**64**), $\quad \text{dif. long.} = \dfrac{166,7}{\cos 40° 25,3'}.$

$$\begin{aligned} \log 166,7 &= 12,2219-10 \\ \log \cos 40° 25,3' &= 9,8815-10 \\ \hline \log \text{dif. long.} &= 2,3404 \end{aligned}$$

$$\text{dif. long.} = 219' = 3° 39'.$$

Como el buque navega hacia el Este, habrá alcanzado una longitud$=58° 51'-3° 39'=55° 12'$ Oeste.

PROBLEMAS

1. Un vapor cuya posición es 26° 15′ latitud Norte y 61° 43′ longitud Oeste, navega hacia el Noroeste 253 millas. Hallar la latitud y longitud de la posición alcanzada.

Solución. 29° 13,9′ latitud Norte; 65° 5,1′ longitud Oeste.

2. Un buque parte de 31° 14′ latitud Norte y 42° 19′ longitud Oeste, y navega 325 millas en la dirección E. N. E. Hallar la posición alcanzada.

3. Partiendo del punto 42° 30′ latitud Norte y 58° 51′ longitud Oeste, un acorazado navega 300 millas hacia el S. E. ¼ S. Hallar el lugar alcanzado.

Solución. 38° 21′ latitud Norte; 55° 12′ longitud Oeste.

4. Un crucero navega desde la posición 49° 56′ latitud Norte, 15° 16′ longitud Oeste, a otra situada a 47° 18′ latitud Norte y 20° 10′ longitud Oeste. Hállese el rumbo y la distancia.

Sugestión. Se pueden calcular la diferencia de latitud, la diferencia de longitud y la latitud media.

5. Un torpedero, partiendo de 37° latitud Norte y 32° 16′ longitud Oeste, navega en la dirección 36° 56′ al Oeste del Norte, y alcanza la latitud 41° N. Hallar la distancia navegada y la longitud de la posición alcanzada. *Solución.* Distancia = 300,3 millas; longitud, 36° 8′ Oeste.

6. Un buque parte de un punto situado a 42° 30′ latitud Norte y 58° 51′ longitud Oeste, y navega con una dirección comprendida entre S y E hasta que su desviación es de 163 millas y su latitud 38° 22′ N. Hallar el rumbo, la distancia y la longitud de la posición alcanzada.

7. Un crucero partiendo de un punto situado a 47° 44′ latitud Norte y 32° 44′ longitud Oeste, navega 171 millas con una dirección comprendida entre el N y el E hasta alcanzar la latitud 50° 2′ N. Hallar su rumbo y la longitud de la posición alcanzada.

Solución. Rumbo, 36° 11′ al Este del Norte; long. 30° 10′ Oeste.

8. Un velero parte de 47° 15′ latitud Norte y 20° 48′ longitud Oeste, y navega 208 millas con una dirección comprendida entre el Sur y el Oeste, siendo su desviación de 162 millas. Hallar el rumbo, la longitud y la latitud de la posición alcanzada.

PROBLEMAS ADICIONALES

1. a. Si $\log_a x = \log_a y + 2$, calcular el valor de $\frac{x}{y}$.

Solución. a^2.

b. Sin tablas, hallar el valor de $\frac{1}{2} \log_3 \sqrt{33} + \log_9 \sqrt{\frac{3}{11}}$.

Solución. $\frac{1}{2}$.

2. Un lado de un triángulo tiene una longitud doble de la de otro. La diferencia entre los ángulos opuestos a estos lados es 90°. Hallar todos los ángulos.

3. Se tiene un círculo inscrito en un triángulo cuyos lados son 7, 8 y 9. Hallar en forma del radical más simple el área del triángulo formado uniendo los puntos de contacto. *Solución.* $\frac{20}{7}\sqrt{5}$.

4. Un triángulo rectángulo ABC, cuyo ángulo recto es C, está en un plano horizontal. Desde P, un punto de la vertical trazada por C, se trazan las rectas PA y PB, formando los ángulos α y β, respectivamente, con PC. Si θ representa el ángulo APB, demuéstrese que

$$\cos \theta = \cos \alpha \cos \beta.$$

5. Usando la definición de "mitad del seno verso" dada en el Artículo 13, demuéstrese que **(52)**, del Artículo 46, puede escribirse

$$\tfrac{1}{2} \operatorname{vers} A = \frac{(s-b)(s-c)}{bc}.$$

Esta fórmula y otras semejantes para $\frac{1}{2}$ vers B y $\frac{1}{2}$ vers C pueden usarse para resolver el caso IV, del Artículo 66, usando la tabla VI del final del libro.

6. Resolver el triángulo correspondiente a la figura 104 por la fórmula de la mitad del seno verso del problema anterior.

Solución. (Parcial). $\frac{1}{2} \operatorname{vers} A = \frac{36}{325}$,

$$\log \tfrac{1}{2} \operatorname{vers} A = 9{,}0444-10,$$

$$A = 38^\circ\ 53'.$$

CAPITULO VI

ANALISIS TRIGONOMETRICO

72. Funciones de la suma y de la diferencia de dos ángulos. Vamos a proceder ahora a obtener las funciones trigonométricas de la suma y la diferencia de dos ángulos conocidas las de estos ángulos.* Las fórmulas fundamentales que vamos a deducir son las siguientes:

(65) $$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y.$$

(66) $$\operatorname{sen}(x-y) = \operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y.$$

(67) $$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y.$$

(68) $$\cos(x-y) = \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y.$$

73. Seno y coseno de la suma de dos ángulos. Demostración de las fórmulas (65) y (67). Sean x e y dos ángulos positivos menores de $90°$. En el círculo trigonométrico (de radio 1) cuyo centro es O, tracemos el ángulo $AOP=x$ y el ángulo $POQ=y$. Entonces el ángulo $AOQ=x+y$.

En la figura **111** el ángulo $x+y$ es menor de $90°$, y en la **112** es mayor de $90°$.

En ambas figuras, QD es perpendicular a OP; QC y DE son perpendiculares a OA (o a la prolongación de OA), y

* Como x e y son ángulos, su suma $x+y$ y su diferencia $x-y$ son también ángulos. Así, si $x=61°$ e $y=23°$, entonces $x+y=84°$ y $x-y=38°$. El lector debe observar que sen $(x+y)$ no es lo mismo que sen x+sen y, que cos $(x-y)$ no es lo mismo que cos x−cos y, etcétera.

FD es paralela a OA. Los triángulos rectángulos DFQ y OED son semejantes. Por tanto,

$$\text{ángulo } FQD = x.$$

En el triángulo rectángulo ODQ,

(1) $$OD = OQ \cos y = \cos y.$$

(2) $$DQ = OQ \operatorname{sen} y = \operatorname{sen} y.$$

Y, según la figura, $\operatorname{sen}(x+y) = CQ$. Por el Art. 30

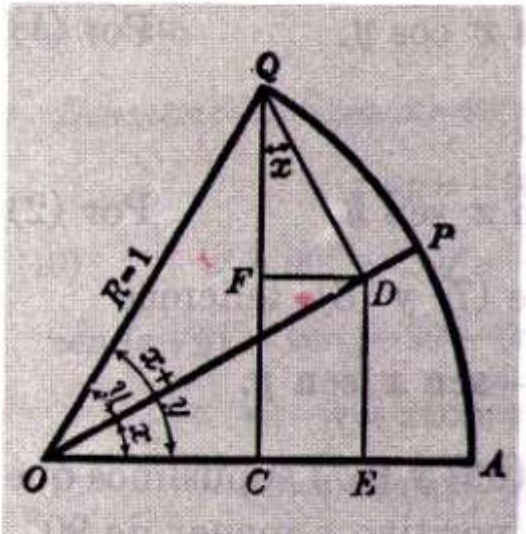


Fig. 111

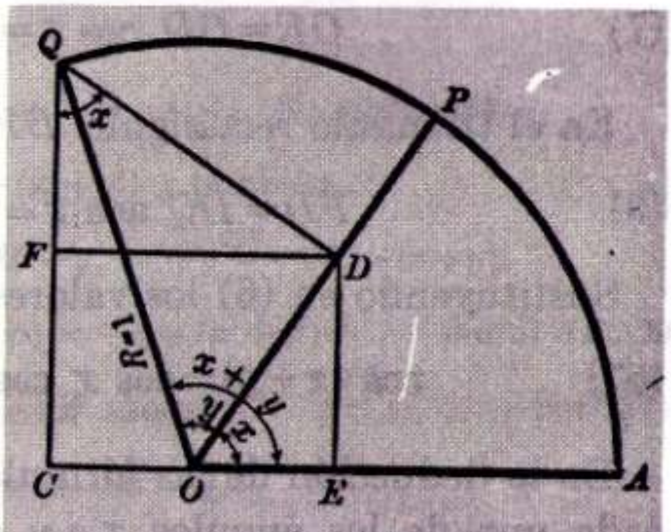


Fig. 112

Pero $$CQ = CF + FQ = ED + FQ.$$

Por lo tanto,

(3) $$\operatorname{sen}(x+y) = ED + FQ.$$

En el triángulo rectángulo OED,

(4) $$ED = OD \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x \cos y.$$ Por (1)

En el triángulo rectángulo DFQ,

(5) $$FQ = DQ \cos x = \cos x \operatorname{sen} y.$$ Por (2)

Sustituyendo en (3) los valores de (4) y (5), tenemos

(65) $$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y.$$

Además, $\cos(x+y) = OC.$ Por el Art. 30

Pero $$OC = OE - CE = OE - FD,$$

en ambas figuras, ya que los segmentos OC, OE, CE sobre el diámetro horizontal son segmentos dirigidos (Art. 30).

Por lo tanto,

(6) $$\cos(x+y) = OE - FD.$$

En el triángulo rectángulo OED,

(7) $$OE = OD \cos x = \cos x \cos y.$$ Por (1)

En el triángulo rectángulo DFQ,

(8) $$FD = DQ \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y.$$ Por (2)

Sustituyendo en (6) los valores de (7) y (8), tenemos

(67) $$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y.$$

En la deducción de las fórmulas **(65)** y **(67)** supusimos que cada uno de los ángulos x e y era positivo y menor de 90°. Es un hecho, sin embargo, que estas fórmulas son verdaderas para valores de x e y de cualquier magnitud, positiva o negativa. Los dos ejercicios que damos a continuación muestran cómo puede demostrarse esto para casos particulares.

EJERCICIO 1. Demostrar que **(67)** es verdadera cuando x es un ángulo positivo del segundo cuadrante e y un ángulo positivo del cuarto cuadrante.

Demostración. Sea $x = 90° + x'$ e $y = 270° + y'$; * entonces

$$x + y = 360° + (x' + y') \text{ y también}$$

(9) $$x' = x - 90°, \quad y' = y - 270°, \quad x' + y' = x + y - 360°.$$

---

* El lector debe notar que x' e y' son ángulos agudos.

$\cos(x+y) = \cos[360°+(x'+y')] = \cos(x'+y')$ por el Art. 29

$= \cos x' \cos y' - \text{sen } x' \text{ sen } y'$ por **(67)**

$= \cos(x-90°)\cos(y-270°) - \text{sen}(x-90°)\text{ sen}(y-270°)$ de (9)

$= \text{sen } x(-\text{sen } y) - (-\cos x \cos y)$ por el Art. 29

$= \cos x \cos y - \text{sen } x \text{ sen } y,$ como se quería demostrar.

Ejercicio 2. Demostrar que **(65)** es verdadera cuando x es un ángulo positivo del primer cuadrante e y un ángulo negativo del segundo cuadrante.

Demostración. Sea $x = 90° - x'$ e $y = -180° - y'$; entonces

$$x+y = -90° - (x'+y') \text{ y también}$$

(10) $$x' = 90° - x,\ \ y' = -180° - y,\ \ x'+y' = -90° - (x+y).$$

$\text{sen}(x+y) = \text{sen}[-90° - (x'+y')] = -\cos(x'+y')$ por el Art. 29

$= -[\cos x' \cos y' - \text{sen } x' \text{ sen } y']$ por **(67)**

$= -[\cos(90°-x)\cos(-180°-y) - \text{sen}(90°-x)\text{ sen}(-180°-y)]$ de (10)

$= -[\text{sen } x(-\cos y) - \cos x \text{ sen } y]$ por el Art. 29

$= \text{sen } x \cos y + \cos x \text{ sen } y,$ c. s. q. d.

Ejemplo 1. Hallar sen 75°, usando **(65)** y las funciones de 45° y 30°.

Solución. Como $75° = 45° + 30°$, obtenemos de **(65)**:

$$\text{sen } 75° = \text{sen}(45°+30°) = \text{sen } 45° \cos 30° + \cos 45° \text{ sen } 30°$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2} \quad \text{del Art. 5}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \tfrac{1}{4}(\sqrt{6}+\sqrt{2}).$$

EJEMPLO 2. Hallar $\cos(x+y)$, teniendo como datos $\operatorname{sen} x = 3/5$ y $\operatorname{sen} y = 5/13$, siendo x e y ángulos positivos agudos.

Solución. Por el Artículo 17 hallamos

$$\operatorname{sen} x = 3/5,\quad \cos x = 4/5,\quad \operatorname{sen} y = 5/13,\quad \cos y = 12/13.$$

Sustituyendo estos valores en (67), obtenemos

$$\cos(x+y) = 4/5 \cdot 12/13 - 3/5 \cdot 5/13 = 33/65.$$

PROBLEMAS

1. Hallar el valor de $\cos 75°$, usando las funciones de $45°$ y $30°$.

Solución. $\frac{1}{4}(\sqrt{6}-\sqrt{2})$.

2. Hallar el valor de $\operatorname{sen} 105°$, usando las funciones de $60°$ y $45°$.

3. Verificar la fórmula (65) para $A = 210°$ y $B = 120°$.

4. Verificar la fórmula (67) para $A = 180°$ y $B = -135°$.

5. Si $\operatorname{tg} x = 3/4$ y $\operatorname{tg} y = 7/24$, hallar $\operatorname{sen}(x+y)$ y $\cos(x+y)$ cuando x e y son ángulos agudos.

Solución. $\operatorname{sen}(x+y) = 4/5$, $\cos(x+y) = 3/5$.

6. Sabiendo que α y β terminan en el segundo y cuarto cuadrantes, respectivamente, y que $\operatorname{sen}\alpha = \cos\beta = 3/5$, hallar $\cos(\alpha+\beta)$.

7. Usando la tabla de valores naturales de las funciones trigonométricas, hallar: a) $\operatorname{sen} 31°$ con las funciones de $20°$ y $11°$; b) la diferencia entre $\operatorname{sen}(20°+11°)$ y $\operatorname{sen} 20° + \operatorname{sen} 11°$.

Solución. b) 0,0178.

8. Hallar $\cos(210°+A)$ si $\sec A = -\sqrt{3}$ y A termina en el segundo cuadrante.

9. Demostrar que $\operatorname{sen} 90° = 1$ y $\cos 90° = 0$, usando las funciones de $60°$ y $30°$.

10. Demostrar que $\operatorname{sen} 180° = 0$ y $\cos 180° = -1$, usando las funciones de $120°$ y $60°$.

Demostrar que

11. $\operatorname{sen}(45^\circ+x) = \dfrac{\cos x+\operatorname{sen} x}{\sqrt{2}}$.

12. $\cos(60^\circ+a) = \dfrac{\cos a-\sqrt{3}\operatorname{sen} a}{2}$.

13. $\operatorname{sen}(y+135^\circ) = \dfrac{\cos y-\operatorname{sen} y}{\sqrt{2}}$.

14. $\cos(210^\circ+x) = \frac{1}{2}(\operatorname{sen} x-\sqrt{3}\cos x)$.

15. $\operatorname{sen}(A+B+C) = \operatorname{sen} A \cos B \cos C+\cos A \operatorname{sen} B \cos C$
$+\cos A \cos B \operatorname{sen} C-\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C.$

Sugestión. $A+B+C = (A+B)+C.$

16. $\cos(A+B+C)=\cos A \cos B \cos C-\operatorname{sen} A \cos B \operatorname{sen} C$
$-\cos A \operatorname{sen} B \operatorname{sen} C-\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B \cos C.$

17. $\operatorname{sen}(x+y)\cos y-\cos(x+y)\operatorname{sen} y=\operatorname{sen} x.$

18. $\operatorname{sen}(x+60^\circ)-\cos(x+30^\circ)=\operatorname{sen} x.$

74. Seno y coseno de la diferencia de dos ángulos. Demostración de las fórmulas (66) y (68). En el último artículo quedó establecido que **(65)** y **(67)** son válidas para valores de x e y de una magnitud cualquiera, positiva o negativa. Por tanto, **(66)** y **(68)** son simplemente casos especiales de **(65)** y **(67)** respectivamente. Así, por ejemplo, si en **(65)**,

$$\operatorname{sen}(x+y)=\operatorname{sen} x \cos y+\cos x \operatorname{sen} y,.$$

sustituímos y por $-y$, tendremos:

(1) $$\operatorname{sen}(x-y)=\operatorname{sen} x \cos(-y)+\cos x \operatorname{sen}(-y).$$

Pero $\cos(-y)=\cos y$ y $\operatorname{sen}(-y)=-\operatorname{sen} y$. (Art. 28)

Sustituyendo en (1), resulta:

(66) $$\operatorname{sen}(x-y)=\operatorname{sen} x \cos y-\cos x \operatorname{sen} y.$$

Análogamente, si en **(67)**,

$$\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y,$$

sustituímos y por $-y$, obtenemos:

$$(2) \qquad \cos(x-y) = \cos x \cos(-y) - \operatorname{sen} x \operatorname{sen}(-y).$$

Pero $\cos(-y) = \cos y$ y $\operatorname{sen}(-y) = -\operatorname{sen} y$, (Art. 28)

Sustituyendo en (2), resulta:

$$(68) \qquad \cos(x-y) = \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y.$$

Ejemplo 1. Hallar $\cos 15°$, usando **(68)** y las funciones de $45°$ y $30°$.

Solución. Como $15° = 45° - 30°$, obtenemos de **(68)**

$$\cos 15° = \cos(45° - 30°) = \cos 45° \cos 30° + \operatorname{sen} 45° \operatorname{sen} 30°$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \frac{\sqrt{3}+1}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}.$$

Se recomienda al lector que resuelva el ejemplo anterior tomando $15° = 60° - 45°$.

Ejemplo 2. Demostrar $\operatorname{sen}(60°+x) - \operatorname{sen}(60°-x) = \operatorname{sen} x$.

Solución.

$$\operatorname{sen}(60°+x) = \operatorname{sen} 60° \cos x + \cos 60° \operatorname{sen} x. \qquad \text{Por } \mathbf{(65)}$$

$$\operatorname{sen}(60°-x) = \operatorname{sen} 60° \cos x - \cos 60° \operatorname{sen} x. \qquad \text{Por } \mathbf{(66)}$$

Restando,

$$\operatorname{sen}(60°+x) - \operatorname{sen}(60°-x) = 2 \cos 60° \operatorname{sen} x$$

$$= 2 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot \operatorname{sen} x = \operatorname{sen} x.$$

PROBLEMAS

1. Hallar el sen 15°, usando las funciones de 45° y 30°.

Solución. $\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$.

2. Hallar sen $(x-y)$ y cos $(x-y)$, sabiendo que sen $x = \frac{1}{4}$ y sen $y = \frac{1}{3}$, siendo x e y ángulos agudos.

3. Hallar sen $(x-y)$ y cos $(x-y)$, sabiendo que tg $x = \frac{4}{3}$ y tg $y = \frac{3}{4}$, y que x termina en el tercer cuadrante e y en el primero.

Solución. sen $(x-y) = -\frac{7}{25}$, cos $(x-y) = -\frac{24}{25}$.

4. Verificar la fórmula (**68**) para $A = 135°$ y $B = 45°$.

Demostrar que

5. $\operatorname{sen}(45°-x) = \dfrac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\sqrt{2}}$.

6. $\cos(60°-A) = \dfrac{\cos A + \sqrt{3}\operatorname{sen} A}{2}$.

7. $\cos(x-315°) = \dfrac{\cos x - \operatorname{sen} x}{\sqrt{2}}$.

8. $\operatorname{sen}(\beta-120°) = -\dfrac{\operatorname{sen}\beta + \sqrt{3}\cos\beta}{2}$.

9. $\operatorname{sen}(60°+x) - \operatorname{sen} x = \operatorname{sen}(60°-x)$.

10. $\cos(30°+y) - \cos(30°-y) = -\operatorname{sen} y$.

11. $\cos(x+45°) + \cos(x-45°) = \sqrt{2}\cos x$.

12. $\cos(Q+45°) + \operatorname{sen}(Q-45°) = 0$.

13. $\operatorname{sen}(x+y)\operatorname{sen}(x-y) = \operatorname{sen}^2 x - \operatorname{sen}^2 y$.

14. $\cos(x-y+z) = \cos x \cos y \cos z + \cos x \operatorname{sen} y \operatorname{sen} z$
$- \operatorname{sen} x \cos y \operatorname{sen} z + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \cos z$.

75. Tangente y cotangente de la suma y de la diferencia de dos ángulos. De **(16)** (Art. 17) y de **(65)** y **(67)** (Art. 72), obtenemos:

$$\operatorname{tg}(x+y)=\frac{\operatorname{sen}(x+y)}{\cos(x+y)}=\frac{\operatorname{sen} x \cos y+\cos x \operatorname{sen} y}{\cos x \cos y-\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}.$$

Dividiendo numerador y denominador por $\cos x \cos y$, tendremos:

$$\operatorname{tg}(x+y)=\frac{\dfrac{\operatorname{sen} x \cos y}{\cos x \cos y}+\dfrac{\cos x \operatorname{sen} y}{\cos x \cos y}}{\dfrac{\cos x \cos y}{\cos x \cos y}-\dfrac{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}{\cos x \cos y}}$$

$$=\frac{\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}+\dfrac{\operatorname{sen} y}{\cos y}}{1-\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\cdot\dfrac{\operatorname{sen} y}{\cos y}}.$$

Como $\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}=\operatorname{tg} x$ y $\dfrac{\operatorname{sen} y}{\cos y}=\operatorname{tg} y$, resulta:

(69) $$\operatorname{tg}(x+y)=\frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}.$$

De la misma manera, de las fórmulas **(66)** y **(68)** se obtiene:

(70) $$\operatorname{tg}(x-y)=\frac{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} y}{1+\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}.$$

De la fórmula **(17)** (Art. 17) y de **(65)** y **(67)** (Art. 72) hallamos:

$$\operatorname{ctg}(x+y)=\frac{\cos(x+y)}{\operatorname{sen}(x+y)}=\frac{\cos x \cos y-\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} x \cos y+\cos x \operatorname{sen} y}.$$

Dividiendo numerador y denominador por sen x sen y, resulta:

$$\operatorname{ctg}(x+y)=\frac{\dfrac{\cos x\cos y}{\operatorname{sen} x\operatorname{sen} y}-\dfrac{\operatorname{sen} x\operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} x\operatorname{sen} y}}{\dfrac{\operatorname{sen} x\cos y}{\operatorname{sen} x\operatorname{sen} y}+\dfrac{\cos x\operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} x\operatorname{sen} y}}$$

$$=\frac{\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}\cdot\dfrac{\cos y}{\operatorname{sen} y}-1}{\dfrac{\cos y}{\operatorname{sen} y}+\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}}.$$

Como $\dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}=\operatorname{ctg} x$ y $\dfrac{\cos y}{\operatorname{sen} y}=\operatorname{ctg} y$, obtenemos

$$\operatorname{ctg}(x+y)=\frac{\operatorname{ctg} x\operatorname{ctg} y-1}{\operatorname{ctg} y+\operatorname{ctg} x}. \tag{71}$$

De la misma manera, de (66) y (68) podemos demostrar que

$$\operatorname{ctg}(x-y)=\frac{\operatorname{ctg} x\ \operatorname{ctg} y+1}{\operatorname{ctg} y-\operatorname{ctg} x}. \tag{72}$$

Las fórmulas (65) a (72) pueden escribirse en forma más resumida como sigue:

$$\operatorname{sen}(x\pm y)=\operatorname{sen} x\cos y\pm\cos x\operatorname{sen} y,$$

$$\cos(x\pm y)=\cos x\cos y\mp\operatorname{sen} x\operatorname{sen} y,$$

$$\operatorname{tg}(x\pm y)=\frac{\operatorname{tg} x\pm\operatorname{tg} y}{1\mp\operatorname{tg} x\operatorname{tg} y},$$

$$\operatorname{ctg}(x\pm y)=\frac{\operatorname{ctg} x\ \operatorname{ctg} y\mp 1}{\operatorname{ctg} y\pm\operatorname{ctg} x}.$$

Las fórmulas deducidas en este capítulo demuestran el Teorema de adición para funciones trigonométricas, a saber, que *cualquier función trigonométrica de la suma algebraica de dos ángulos puede expresarse en términos de las funciones trigonométricas de esos ángulos.*

EJEMPLO 1. Hallar tg 15°, usando **(70)** y las funciones de 60° y 45°.

Solución. Como $15° = 60° - 45°$, obtenemos de **(70)**

$$\operatorname{tg} 15° = \operatorname{tg}(60° - 45°) = \frac{\operatorname{tg} 60° - \operatorname{tg} 45°}{1 + \operatorname{tg} 60° \ \operatorname{tg} 45°} = \frac{\sqrt{3} - 1}{1 + \sqrt{3}} = 2 - \sqrt{3}.$$

Se recomienda al lector que resuelva este mismo ejemplo teniendo en cuenta la igualdad $15° = 45° - 30°$.

PROBLEMAS

1. Hallar tg 75° conocidas las funciones de 45° y 30°.
Solución. $2 + \sqrt{3}$.

2. Hallar ctg 105° conocidas las funciones de 60° y 45°.

3. Hallar $\operatorname{tg}(x+y)$ y $\operatorname{tg}(x-y)$, teniendo como datos $\operatorname{tg} x = \frac{1}{2}$ y $\operatorname{tg} y = \frac{1}{4}$.
Solución. $\frac{6}{7}$, $\frac{2}{9}$.

4. Si $\operatorname{tg}(x+y) = \sqrt{3}$ y $\operatorname{tg} x = 1$, calcular $\operatorname{tg} y$.

Demostrar que

5. $\operatorname{tg}(45° + x) = \dfrac{1 + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x}$.

6. $\operatorname{ctg}(y - 45°) = \dfrac{1 + \operatorname{ctg} y}{1 - \operatorname{ctg} y}$.

7. $\operatorname{tg}(A - 60°) = \dfrac{\operatorname{tg} A - \sqrt{3}}{1 + \sqrt{3} \operatorname{tg} A}$.

8. $\operatorname{ctg}(B + 210°) = \dfrac{\sqrt{3} \operatorname{ctg} B - 1}{\operatorname{ctg} B + \sqrt{3}}$.

9. $\dfrac{\operatorname{sen}(x+y)}{\operatorname{sen}(x-y)} = \dfrac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x - \operatorname{tg} y}.$

10. $\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y = \dfrac{\operatorname{sen}(x+y)}{\cos x \cos y}.$

11. $\operatorname{tg}(x+45°) + \operatorname{ctg}(x-45°) = 0.$

12. $\operatorname{ctg} A - \operatorname{ctg} B = \dfrac{\operatorname{sen}(B-A)}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}.$

13. $1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y = \dfrac{\cos(x+y)}{\cos x \cos y}.$

14. $\operatorname{ctg} P \operatorname{ctg} Q - 1 = \dfrac{\cos(P+Q)}{\operatorname{sen} P \operatorname{sen} Q}.$

Las fórmulas de reducción de los Artículos 25-28 fueron deducidas suponiendo que A era un ángulo agudo. Las fórmulas del Artículo 72 nos permiten demostrar que aquellas fórmulas son generales, es decir, válidas para *cualquier ángulo* A. El siguiente ejemplo es una demostración de ello:

Ejemplo 2. Demostrar que

a) $$\operatorname{sen}(180°+A) = -\operatorname{sen} A, \qquad \textbf{(Art. 26)}$$

y

b) $$\operatorname{tg}(270°+B) = -\operatorname{ctg} B, \qquad \textbf{(Art. 27)}$$

cuando A y B son ángulos cualesquiera.

Solución. Para demostrar (a) usemos (65), tomando

$$x = 180°, \quad y = A.$$

Entonces, $\operatorname{sen}(180°+A) = \operatorname{sen} 180° \cos A + \cos 180° \operatorname{sen} A$.

Por el Artículo 20, $\operatorname{sen} 180° = 0$, $\cos 180° = -1$. Sustituyendo estos valores, obtenemos (a).

Para demostrar (b) no podemos usar (69), ya que, por el Artículo 20, $\operatorname{tg} 270° = \infty$. Pero por (16) (Art. 17), tenemos:

(1) $$\operatorname{tg}(270°+B) = \frac{\operatorname{sen}(270°+B)}{\cos(270°+B)}.$$

Ahora usemos **(65)** y **(67)**, tomando $x = 270°$, $y = B$. Entonces,

$$\text{sen}\,(270°+B) = \text{sen}\,270°\ \cos B + \cos 270°\ \text{sen}\,B,$$

$$\cos\,(270°+B) = \cos 270°\ \cos B - \text{sen}\,270°\ \text{sen}\,B.$$

Por el Artículo 20, $\text{sen}\,270° = -1$, $\cos 270° = 0$ Por tanto,

$$\text{sen}\,(270°+B) = -\cos B,$$

$$\cos\,(270°+B) = \text{sen}\,B.$$

Sustituyendo estos valores en el segundo miembro de **(1)**, se obtiene la igualdad **(b)**.

PROBLEMAS

Usando las fórmulas del Artículo 72, obtener las fórmulas para el seno, coseno, tangente y cotangente de los siguientes ángulos:

1. $90°+A$.

2. $180°-A$.

3. $270°-A$.

4. $A-90°$.

76. Funciones trigonométricas del angulo doble conocidas las del ángulo. Las fórmulas **(65)** a **(72)** son verdaderas para todos los valores posibles de x e y; por tanto, deben ser válidas cuando x es igual a y.

Para hallar $\text{sen}\,2x$ tomemos **(65)**,

$$\text{sen}\,(x+y) = \text{sen}\,x\ \cos y + \cos x\ \text{sen}\,y$$

y hagamos $x=y$. Resulta:

$$\text{sen}\,(x+x) = \text{sen}\,x\ \cos x + \cos x\ \text{sen}\,x,$$

o sea,

$$\textbf{(73)}\qquad \text{sen}\,2x = 2\,\text{sen}\,x\,\cos x.$$

Para hallar $\cos 2x$ tomemos **(67)**,

$$\cos\,(x+y) = \cos x\ \cos y - \text{sen}\,x\ \text{sen}\,y$$

y hagamos $y=x$. Se obtiene:

$$\cos(x+x) = \cos x \cos x - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} x,$$

o sea,

$$\textbf{(74)} \qquad \cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x.$$

Como $\cos^2 x = 1 - \operatorname{sen}^2 x$, **(74)** puede escribirse

$$\textbf{(74a)} \qquad \cos 2x = 1 - 2 \operatorname{sen}^2 x.$$

O también, como $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$, **(74)** puede escribirse

$$\textbf{(74b)} \qquad \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1.$$

Para hallar $\operatorname{tg} 2x$ tomemos **(69)**,

$$\operatorname{tg}(x+y) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} y}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}$$

y sustituyamos y por x. Resulta:

$$\operatorname{tg}(x+x) = \frac{\operatorname{tg} x + \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg} x \operatorname{tg} x},$$

o sea,

$$\textbf{(75)} \qquad \operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1 - \operatorname{tg}^2 x}.$$

77. Funciones de ángulos múltiples. El método del último artículo puede extenderse fácilmente para hallar las funciones de nx en términos de las funciones de x si n es un entero.

Para hallar $\operatorname{sen} 3x$ en función de $\operatorname{sen} x$ tomemos **(65)**,

$$\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y$$

y sustituyamos y por $2x$. Esto da:

$$\operatorname{sen}(x+2x) = \operatorname{sen} x \cos 2x + \cos x \operatorname{sen} 2x,$$

o sea, $\operatorname{sen} 3x = \operatorname{sen} x\,(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) + \cos x\,(2 \operatorname{sen} x \cos x)$ por **(74), (73)**

$$= 3 \operatorname{sen} x \cos^2 x - \operatorname{sen}^3 x$$

$$= 3 \operatorname{sen} x\,(1 - \operatorname{sen}^2 x) - \operatorname{sen}^3 x$$

$$= 3 \operatorname{sen} x - 4 \operatorname{sen}^3 x.$$

Para hallar $\operatorname{tg} 4x$ en función de $\operatorname{tg} x$, tomemos **(69), (75)**,

$$\operatorname{tg} 4x = \operatorname{tg}(2x + 2x) = \frac{2 \operatorname{tg} 2x}{1 - \operatorname{tg}^2 2x} = \frac{4 \operatorname{tg} x\,(1 - \operatorname{tg}^2 x)}{1 - 6 \operatorname{tg}^2 x + \operatorname{tg}^4 x}.$$

Ejemplo. Dado $\operatorname{sen} x = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$, estando x en el segundo cuadrante, hallar $\operatorname{sen} 2x$, $\cos 2x$, $\operatorname{tg} 2x$.

Solución Como $\operatorname{sen} x = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ y x está en el segundo cuadrante, obtenemos, usando el método del Artículo 15,

$$\operatorname{sen} x = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \cos x = -\frac{1}{\sqrt{5}}, \quad \operatorname{tg} x = -2.$$

Sustituyendo en **(73)**, hallamos

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x = 2 \cdot \frac{2}{\sqrt{5}}\left(-\frac{1}{\sqrt{5}}\right) = -\frac{4}{5}.$$

Análogamente, obtenemos $\cos 2x = -\tfrac{3}{5}$ sustituyendo en **(74)** y $\operatorname{tg} 2x = \tfrac{4}{3}$ sustituyendo en **(75)**.

PROBLEMAS

1. Sabiendo que $\operatorname{tg} x = 2$ y que x está en el tercer cuadrante, hallar $\operatorname{sen} 2x$, $\cos 2x$, $\operatorname{tg} 2x$.

Solución. $\operatorname{sen} 2x = \tfrac{4}{5}$, $\cos 2x = -\tfrac{3}{5}$, $\operatorname{tg} 2x = -\tfrac{4}{3}$.

2. Si $\operatorname{ctg} x = k$, expresar las seis funciones trigonométricas de $2x$ en términos de k.

3. Si A está en el tercer cuadrante y sen $A = -\frac{3}{5}$, hallar

a. $\cos(90°+A)$. *Solución.* $\frac{3}{5}$.

b. $\operatorname{tg} 2A$. *Solución.* $\frac{24}{7}$.

c. $\operatorname{ctg}(180°-2A)$. *Solución.* $-\frac{7}{24}$.

d. $\sec(270°-2A)$. *Solución.* $-\frac{25}{24}$.

4. Si θ es un ángulo del segundo cuadrante y $\operatorname{tg}\theta = -\frac{5}{12}$, hallar

a. $\operatorname{ctg} 2\theta$.

b. $\operatorname{sen}(180°-\theta)$.

c. $\cos(270°-2\theta)$.

d. $\csc(180°+2\theta)$.

Considerando cada una de las siguientes como una función de un ángulo doble, expresar cada una de ellas en términos de las funciones del ángulo sencillo.

5. a) $\operatorname{sen} 6\theta$; b) $\operatorname{sen} 10°$. *Solución.* a) $2 \operatorname{sen} 3\theta \cos 3\theta$;
b) $2 \operatorname{sen} 5° \cos 5°$.

6. a) $\operatorname{tg} 4\theta$; b) $\cos 45°$.

7 a) $\cos\theta$; b) $\operatorname{tg} 400°$.

Solución. a) $2\cos^2\frac{\theta}{2} - 1$, también hay otras formas;

b) $\dfrac{2 \operatorname{tg} 200°}{1-\operatorname{tg}^2 200°}$.

8. a) $\operatorname{ctg} 3\theta$; b) $\sec\frac{\theta}{2}$.

9. Demostrar que $\cos 3x = 4\cos^3 x - 3\cos x$.

10. Demostrar que $\operatorname{tg} 3A = \dfrac{3\operatorname{tg} A - \operatorname{tg}^3 A}{1-3\operatorname{tg}^2 A}$.

11. Expresar $\cos 4B$ en función de sen B.

Solución. $1-8\operatorname{sen}^2 B + 8\operatorname{sen}^4 B$.

12. Expresar $\operatorname{sen} 5\theta$ en función de sen θ.

Demostrar que en un triángulo rectángulo, siendo C el ángulo recto, se verifican las siguientes relaciones:

13. $\operatorname{sen} 2A = \operatorname{sen} 2B.$

14. $\operatorname{tg} 2A = \dfrac{2ab}{b^2 - a^2}.$

15. $\cos 2A = \dfrac{b^2 - a^2}{c^2}.$

16. $\cos 2A + \cos 2B = 0.$

17. $\operatorname{tg} B = \operatorname{ctg} A + \cos C.$

18. $\operatorname{sen} 3A = \dfrac{3ab^2 - a^3}{c^3}.$

19. a. Demostrar que el valor de $\operatorname{sen} 2\theta$ es menor que el valor de $2 \operatorname{sen} \theta$ para todos los valores de θ desde 0° a 90°.

b. Demostrar que el valor de la fracción $\dfrac{\operatorname{sen} 2\theta}{2 \operatorname{sen} \theta}$ decrece de 1 a 0 a medida que θ crece de 0° a 90°.

78. Funciones trigonométricas de un ángulo en función de las del ángulo mitad. De **(73)**,

$$\operatorname{sen} 2x = 2 \operatorname{sen} x \cos x.$$

Reemplacemos $2x$ por x y, en consecuencia, x por $\dfrac{x}{2}$. Obtenemos:

$$\operatorname{sen} x = 2 \operatorname{sen} \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}. \tag{76}$$

De **(74)**, $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x.$

Reemplacemos $2x$ por x y x por $\dfrac{x}{2}$. Resulta:

$$\cos x = \cos^2 \frac{x}{2} - \operatorname{sen}^2 \frac{x}{2}. \tag{77}$$

De (75), $$\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg} x}{1-\operatorname{tg}^2 x}.$$

Reemplacemos $2x$ por x, y x por $\frac{x}{2}$. Esto da

$$\text{(78)} \qquad \operatorname{tg} x = \frac{2 \operatorname{tg} \frac{x}{2}}{1-\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2}}.$$

79. Funciones trigonométricas del ángulo mitad en términos del coseno del ángulo. De (74a) y (74b) obtenemos

$$2 \operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos 2x,$$

y

$$2 \cos^2 x = 1 + \cos 2x.$$

Despejando sen x y cos x, resulta

$$\operatorname{sen} x = \pm \sqrt{\frac{1-\cos 2x}{2}},$$

y

$$\cos x = \pm \sqrt{\frac{1+\cos 2x}{2}}.$$

Si ahora sustituímos $2x$ por x y, en consecuencia x por $\frac{x}{2}$, resulta:

$$\text{(79)} \qquad \operatorname{sen} \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1-\cos x}{2}},$$

y

$$\text{(80)} \qquad \cos \frac{x}{2} = \pm \sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}.$$

Para hallar $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ basta dividir **(79)** por **(80)**, obteniendo

$$\operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{\cos\frac{x}{2}}=\frac{\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}}{\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{2}}},$$

o sea,

$$\textbf{(81)}\qquad \operatorname{tg}\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}.$$

Multiplicando numerador y denominador del segundo miembro por $\sqrt{1+\cos x}$, resulta*

$$\textbf{(82)}\qquad \operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x},$$

y multiplicando numerador y denominador por $\sqrt{1-\cos x}$, obtenemos

$$\textbf{(83)}\qquad \operatorname{tg}\frac{x}{2}=\frac{1-\cos x}{\operatorname{sen} x}.$$

Como la tangente y la cotangente son funciones recíprocas, tenemos inmediatamente, de **(81)**,

$$\textbf{(84)}\qquad \operatorname{ctg}\frac{x}{2}=\pm\sqrt{\frac{1+\cos x}{1-\cos x}}.$$

---

* $\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}}\cdot\frac{\sqrt{1+\cos x}}{\sqrt{1+\cos x}}=\frac{\sqrt{1-\cos^2 x}}{1+\cos x}=\frac{\operatorname{sen} x}{1+\cos x}$.

Se toma solamente el signo positivo del radical porque $1+\cos x$ no puede ser nunca negativa y $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$ y $\operatorname{sen} x$ tienen siempre signos iguales.

De **(82)** y **(83)**,

(85) $$\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = \frac{1+\cos x}{\operatorname{sen} x}.$$

(86) $$\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = \frac{\operatorname{sen} x}{1-\cos x}.$$

80. Transformación de sumas y diferencias de senos y de cosenos en producto. Del Artículo 72,

(65) $\operatorname{sen}(x+y) = \operatorname{sen} x \cos y + \cos x \operatorname{sen} y.$

(66) $\operatorname{sen}(x-y) = \operatorname{sen} x \cos y - \cos x \operatorname{sen} y.$

(67) $\cos(x+y) = \cos x \cos y - \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y.$

(68) $\cos(x-y) = \cos x \cos y + \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y.$

De estas ecuaciones, tenemos

(*a*) $\operatorname{sen}(x+y) + \operatorname{sen}(x-y) = 2 \operatorname{sen} x \cos y.$

Sumando **(65)** y **(66)**

(*b*) $\operatorname{sen}(x+y) - \operatorname{sen}(x-y) = 2 \cos x \operatorname{sen} y.$

Restando **(66)** de **(65)**

(*c*) $\cos(x+y) + \cos(x-y) = 2 \cos x \cos y.$

Sumando **(67)** y **(68)**

(*d*) $\cos(x+y) - \cos(x-y) = -2 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y.$

Restando **(68)** de **(67)**

Hagamos $x+y=A$ $\qquad$ $x+y=A$

y $x-y=B$ $\qquad$ $x-y=B$

Sumando, $2x=A+B$ $\qquad$ Restando, $2y=A-B$

$x=\frac{1}{2}(A+B).$ $\qquad$ $y=\frac{1}{2}(A-B).$

Ahora reemplazando los valores de $x+y$, $x-y$, x, y en función de A y B, en **(a)** a **(d)** inclusive, obtenemos

(87) $\quad \text{sen } A+\text{sen } B=2 \text{ sen } \tfrac{1}{2}(A+B) \cos \tfrac{1}{2}(A-B).$

(88) $\quad \text{sen } A-\text{sen } B=2 \cos \tfrac{1}{2}(A+B) \text{ sen } \tfrac{1}{2}(A-B).$

(89) $\quad \cos A+\cos B=2 \cos \tfrac{1}{2}(A+B) \cos \tfrac{1}{2}(A-B).$

(90) $\quad \cos A-\cos B=-2 \text{ sen } \tfrac{1}{2}(A+B) \text{ sen } \tfrac{1}{2}(A-B).$

Una demostración de la ley de las tangentes (Art. **44**) puede deducirse por medio de **(87)** y **(88)**. La demostración es como sigue:

Por la ley de los senos,

$$\frac{a}{\text{sen } A}=\frac{b}{\text{sen } B},$$

y por las propiedades de componer y dividir de las proporciones, resulta

(e)
$$\frac{a+b}{a-b}=\frac{\text{sen } A+\text{sen } B}{\text{sen } A-\text{sen } B}.$$

La expresión deseada para el segundo miembro se obtiene de **(87)** y **(88)**.

Dividiendo **(87)** por **(88)**, miembro a miembro, obtenemos lo siguiente:

$$\frac{\text{sen } A+\text{sen } B}{\text{sen } A-\text{sen } B}=\frac{2 \text{ sen } \tfrac{1}{2}(A+B) \cos \tfrac{1}{2}(A-B)}{2 \cos \tfrac{1}{2}(A+B) \text{ sen } \tfrac{1}{2}(A-B)}$$

$$=\frac{\text{sen } \tfrac{1}{2}(A+B)}{\cos \tfrac{1}{2}(A+B)} \cdot \frac{\cos \tfrac{1}{2}(A-B)}{\text{sen } \tfrac{1}{2}(A-B)}$$

$$=\text{tg } \tfrac{1}{2}(A+B) \text{ ctg } \tfrac{1}{2}(A-B).$$

Pero $\text{ctg } \tfrac{1}{2}(A-B)=\dfrac{1}{\text{tg } \tfrac{1}{2}(A-B)}$.

Por tanto,

$$(f) \qquad \frac{\text{sen } A+\text{sen } B}{\text{sen } A-\text{sen } B}=\frac{\text{tg } \frac{1}{2}(A+B)}{\text{tg } \frac{1}{2}(A-B)}.$$

La fórmula **(44)** (Art. 44) se deduce de (*e*) y (*f*).

EJEMPLO 1. Hallar sen $22\frac{1}{2}°$, sabiendo que $\cos 45° = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Solución. De **(79)**, $\text{sen } \frac{x}{2} = \pm\sqrt{\frac{1-\cos x}{2}}$.

Si $x = 45°$, entonces $\frac{x}{2} = 22\frac{1}{2}°$, y obtenemos

$$\text{sen } 22\tfrac{1}{2}° = \sqrt{\frac{1-\frac{1}{\sqrt{2}}}{2}} = \frac{1}{2}\sqrt{2-\sqrt{2}}.$$

EJEMPLO 2. Transformar la suma sen $7x$+sen $3x$ en producto.

Solución. De **(87)**,

$$\text{sen } A+\text{sen } B=2 \text{ sen } \tfrac{1}{2}(A+B) \cos \tfrac{1}{2}(A-B).$$

Si $A = 7x$, $B = 3x$. Entonces, $A+B = 10x$ y $A-B = 4x$.

Sustituyendo, obtenemos

$$\text{sen } 7x+\text{sen } 3x = 2 \text{ sen } 5x \cos 2x.$$

PROBLEMAS

1. Hallar el coseno y la tangente de $22\frac{1}{2}°$.

Solución. $\frac{1}{2}\sqrt{2+\sqrt{2}}$, $\sqrt{2}-1$.

2. Hallar el seno, coseno y tangente de 15°, usando el coseno de 30°.

3. Si A termina en el tercer cuadrante y ctg $A = \frac{4}{3}$, hállese el valor de

a. sen $\frac{A}{2}$. *Solución.* $\frac{3\sqrt{10}}{10}$.

b. $\cos \frac{A}{2}$. *Solución.* $-\frac{\sqrt{10}}{10}$.

c. $\operatorname{ctg}\left(180° - \frac{A}{2}\right)$ *Solución.* $\frac{1}{3}$.

d. $\operatorname{tg}\left(270° - \frac{A}{2}\right)$. *Solución.* $-\frac{1}{3}$.

e. $\cos 2A - \operatorname{tg}\frac{A}{2}$. *Solución.* $\frac{82}{25}$.

4. Si θ termina en el cuarto cuadrante y $\operatorname{sen}\theta = -\frac{5}{13}$, hállese el valor de

a. $\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}$. Usese la fórmula (82) o la (83).

b. $\csc \frac{\theta}{2}$.

c. $\operatorname{sen}\left(90° + \frac{\theta}{2}\right)$.

d. $\operatorname{ctg}\left(180° + \frac{\theta}{2}\right)$.

e. $\operatorname{sen} 2\theta + \operatorname{ctg}\frac{\theta}{2}$.

Considerando las siguientes como funciones de la mitad de un ángulo, expresar cada una como una función del ángulo:

5. a) $\operatorname{sen} 7\frac{1}{2}°$; b) $\operatorname{tg}\frac{x}{4}$.

Solución. a) $\sqrt{\frac{1-\cos 15°}{2}}$; b) $\frac{\operatorname{sen}\frac{x}{2}}{1+\cos\frac{x}{2}}$.

6. a) $\cos 67\frac{1}{2}°$; b) $\operatorname{ctg}\theta$.

7. a) $\operatorname{sen}\theta$; b) $\operatorname{ctg}\frac{3\theta}{2}$.

Solución. a) $\pm\sqrt{\frac{1-\cos 2\theta}{2}}$; b) $\frac{1+\cos 3\theta}{\operatorname{sen} 3\theta}$.

8. **a)** $\operatorname{tg}\theta$; **b)** $\cos 3\theta$.

9. Expresar $\sec\frac{a}{2}$ en función de $\sec a$.

Solución. $\pm\sqrt{\frac{2\sec a}{1+\sec a}}$.

10. Expresar $\operatorname{sen} x$ en función de $\operatorname{tg}\frac{x}{2}$.

Verificar las siguientes igualdades:

11. $\operatorname{sen} 32^\circ+\operatorname{sen} 28^\circ = \cos 2^\circ$.

12. $\operatorname{sen} 50^\circ-\operatorname{sen} 10^\circ = \sqrt{3}\operatorname{sen} 20^\circ$.

13. $\cos 80^\circ-\cos 20^\circ = -\operatorname{sen} 50^\circ$.

14. $\cos 60^\circ+\cos 30^\circ = \sqrt{2}\cos 15^\circ$.

15. $\operatorname{sen} 40^\circ-\cos 70^\circ = \sqrt{3}\operatorname{sen} 10^\circ$.

16. $\operatorname{sen}(60^\circ+a)+\operatorname{sen}(60^\circ-a) = \sqrt{3}\cos a$.

17. $\cos 5x+\cos 9x = 2\cos 7x\cos 2x$.

18. $\frac{\operatorname{sen} 7x-\operatorname{sen} 5x}{\cos 7x+\cos 5x} = \operatorname{tg} x$.

19. $\frac{\operatorname{sen} 33^\circ+\operatorname{sen} 3^\circ}{\cos 33^\circ+\cos 3^\circ} = \operatorname{tg} 18^\circ$.

20. $\frac{\operatorname{sen} A-\operatorname{sen} B}{\operatorname{sen} A+\operatorname{sen} B} = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A-B)\operatorname{ctg}\tfrac{1}{2}(A+B)$.

21. $\frac{\operatorname{sen} A+\operatorname{sen} B}{\cos A+\cos B} = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A+B)$.

22. $\cos 20^\circ-\operatorname{sen} 10^\circ-\operatorname{sen} 50^\circ = 0$.

Demostrar que en un triángulo rectángulo, siendo C el ángulo recto, son verdaderas las siguientes relaciones:

23. $\operatorname{sen}^2\frac{B}{2} = \frac{c-a}{2c}$.

24. $\left(\operatorname{sen}\frac{A}{2}+\cos\frac{A}{2}\right)^2 = \frac{a+c}{c}$.

25. $\frac{a-b}{a+b} = \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(A-B)$.

26. $\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{a}{b+c}$.

81. Identidades trigonométricas. Una identidad trigonométrica es una igualdad que contiene funciones trigonométricas y que es verdadera para todos los valores de los ángulos para los cuales están definidas estas funciones. Así, las fórmulas del Artículo 17 son identidades trigonométricas, ya que son verdaderas para todos los valores de A para los cuales están definidas las funciones; también las fórmulas **(87)** a **(90)** del Artículo 80 son identidades, ya que son verdaderas para todos los valores de A y B.

Consideraremos dos métodos de demostración de identidades dadas.

1. Podemos reducir un miembro a la forma del otro miembro, usando identidades conocidas. En general, el miembro más complicado es reducido a la forma del miembro más sencillo.

2. Podemos reducir ambos miembros, usando identidades conocidas, a la misma expresión. Entonces, como los dos miembros son idénticos a una misma expresión, son idénticos entre sí.

No puede darse ningún método general a seguir en todos los casos. Es esencial un conocimiento completo de las relaciones fundamentales (Art. 17) porque estas relaciones sugieren frecuentemente las reducciones que deben hacerse. En las identidades que contienen funciones de ángulos múltiples, ángulos fraccionarios o de sumas y diferencias de ángulos es, por regla general, aconsejable expresar dichas funciones como funciones de los ángulos sencillos. Si, después de haber hecho esto, no aparece ningún procedimiento factible, usualmente es ventajoso cambiar todas las funciones a senos y cosenos.

Veamos ahora algunos ejemplos de los dos métodos que acabamos de exponer.

Ejemplo 1. Demostrar que

$$1+\operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x = \sec 2x$$

es una identidad.

Solución. Primer método.

$$1+\operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x = 1+\frac{2\operatorname{tg}^2 x}{1-\operatorname{tg}^2 x} \qquad \text{por (75), Art. 76}$$

$$= \frac{1+\operatorname{tg}^2 x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$$

$$= \frac{1+\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}}{1-\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}} \qquad \text{por (16), Art. 17}$$

$$= \frac{\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x}$$

$$= \frac{1}{\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x} \qquad \text{por (18), Art. 17}$$

$$= \frac{1}{\cos 2x} \qquad \text{por (74), Art. 76}$$

$$= \sec 2x. \qquad \text{Por (23), Art. 17}$$

Segundo método.

$1+\operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x$	$\sec 2x$
$= 1+\dfrac{2\operatorname{tg}^2 x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$	$= \dfrac{1}{\cos 2x}$
$= \dfrac{1+\operatorname{tg}^2 x}{1-\operatorname{tg}^2 x}$	$= \dfrac{1}{\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x}.$
$= \dfrac{1+\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}}{1-\dfrac{\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x}}$	
$= \dfrac{\cos^2 x+\operatorname{sen}^2 x}{\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x}$	
$= \dfrac{1}{\cos^2 x-\operatorname{sen}^2 x}.$	

Luego, $1+\operatorname{tg} 2x \operatorname{tg} x = \sec 2x$ es una identidad.

Ejemplo 2. Demostrar que

$$\frac{\operatorname{sen}(x+y)}{\operatorname{sen}(x-y)}=\frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} y} \text{ es una identidad.}$$

Solución. Segundo método.

$$\frac{\operatorname{sen}(x+y)}{\operatorname{sen}(x-y)} \quad \Bigg| \quad \frac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} y}$$

$$=\frac{\operatorname{sen} x \cos y+\cos x \operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} x \cos y-\cos x \operatorname{sen} y}. \quad \Bigg| \quad =\frac{\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}+\dfrac{\operatorname{sen} y}{\cos y}}{\dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}-\dfrac{\operatorname{sen} y}{\cos y}}$$

$$=\frac{\operatorname{sen} x \cos y+\cos x \operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} x \cos y-\cos x \operatorname{sen} y}.$$

Luego, $\dfrac{\operatorname{sen}(x+y)}{\operatorname{sen}(x-y)}=\dfrac{\operatorname{tg} x+\operatorname{tg} y}{\operatorname{tg} x-\operatorname{tg} y}$ es una identidad.

PROBLEMAS

Demostrar que las siguientes igualdades son identidades:

1. $\operatorname{tg} x \operatorname{sen} x+\cos x=\sec x$.
2. $\operatorname{ctg} x-\sec x \csc x\left(1-2 \operatorname{sen}^2 x\right)=\operatorname{tg} x$.
3. $(\operatorname{tg} x+\operatorname{ctg} x) \operatorname{sen} x \cos x=1$.
4. $\dfrac{\operatorname{sen} y}{1+\cos y}=\dfrac{1-\cos y}{\operatorname{sen} y}$.
5. $\sqrt{\dfrac{1-\operatorname{sen} A}{1+\operatorname{sen} A}}=\sec A-\operatorname{tg} A$.
6. $\operatorname{tg} x \operatorname{sen} x \cos x+\operatorname{sen} x \cos x \operatorname{ctg} x=1$.
7. $\operatorname{ctg}^2 x=\cos^2 x+(\operatorname{ctg} x \cos x)^2$.
8. $(\sec y+\csc y)(1-\operatorname{ctg} y)=(\sec y-\csc y)(1+\operatorname{ctg} y)$.
9. $\operatorname{sen}^2 z \operatorname{tg} z+\cos^2 z \operatorname{ctg} z+2 \operatorname{sen} z \cos z=\operatorname{tg} z+\operatorname{ctg} z$.
10. $\operatorname{sen}^3 x+\cos^3 x=(\operatorname{sen} x+\cos x)(1-\operatorname{sen} x \cos x)$.

11. $\operatorname{sen}^6 x+\cos^6 x = \operatorname{sen}^4 x+\cos^4 x-\operatorname{sen}^2 x \cos^2 x.$

12. $\operatorname{sen} B \operatorname{tg}^2 B+\csc B \sec^2 B = 2 \operatorname{tg} B \sec B+\csc B-\operatorname{sen} B.$

13. $\cos (x+y) \cos (x-y) = \cos^2 x-\operatorname{sen}^2 y.$

14. $\operatorname{sen} (A+B) \operatorname{sen} (A-B) = \cos^2 B-\cos^2 A.$

15. $\dfrac{\cos (x-y)}{\cos (x+y)} = \dfrac{1+\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}{1-\operatorname{tg} x \operatorname{tg} y}.$

16. $\operatorname{tg} A-\operatorname{tg} B = \dfrac{\operatorname{sen} (A-B)}{\cos A \cos B}.$

17. $\operatorname{ctg} x+\operatorname{ctg} y = \dfrac{\operatorname{sen} (x+y)}{\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y}.$

18. $\operatorname{sen} x \cos (y+z)-\operatorname{sen} y \cos (x+z) = \operatorname{sen} (x-y) \cos z.$

19. $\dfrac{\operatorname{tg} (\theta-\varphi)+\operatorname{tg} \varphi}{1-\operatorname{tg} (\theta-\varphi) \operatorname{tg} \varphi} = \operatorname{tg} \theta.$

20. $\operatorname{sen} (x+y-z)+\operatorname{sen} (x+z-y)+\operatorname{sen} (y+z-x)$
$= \operatorname{sen} (x+y+z)+4 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} y \operatorname{sen} z.$

21. $\cos x \operatorname{sen} (y-z)+\cos y \operatorname{sen}(z-x)+\cos z \operatorname{sen} (x-y) = 0.$

22. $\cos 5 a \cos 4 a+\operatorname{sen} 5 a \operatorname{sen} 4 a = \cos a.$

23. $\operatorname{sen} (x+75°) \cos (x-75°) - \cos (x+75°) \operatorname{sen} (x-75°) = \tfrac{1}{2}.$

24. $\cos (2x+y) \cos (x+2y)+\operatorname{sen} (2x+y) \operatorname{sen} (x+2y)$
$= \cos x \cos y+\operatorname{sen} x \operatorname{sen} y.$

25. $\dfrac{\operatorname{ctg} (45°-y)}{\operatorname{ctg} (45°+y)} = \dfrac{1+2 \operatorname{sen} y \cos y}{1-2 \operatorname{sen} y \cos y}.$

26. $\operatorname{tg} (45°+x)-\operatorname{tg} (45°-x) = 2 \operatorname{tg} 2x.$

27. $\operatorname{tg} (45°+C)+\operatorname{tg} (45°-C) = 2 \sec 2 C.$

28. $\operatorname{sen} 2x = \dfrac{2 \operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}.$

29. $\cos 2x = \dfrac{1-\operatorname{tg}^2 x}{1+\operatorname{tg}^2 x}.$

30. $\operatorname{tg} P+\operatorname{ctg} P = 2 \csc 2 P.$

31. $\cos 2x = \cos^4 x-\operatorname{sen}^4 x.$

32. $(\operatorname{sen} x + \cos x)^2 = 1 + \operatorname{sen} 2x.$

33. $\sec 2x = \dfrac{\csc^2 x}{\csc^2 x - 2}$.

34. $2 \csc 2x = \sec x \csc x$.

35. $\operatorname{ctg} y - \operatorname{tg} y = 2 \operatorname{ctg} 2y$.

36. $\cos 2x = \dfrac{2 - \sec^2 x}{\sec^2 x}$.

37. $\dfrac{1 + \operatorname{sen} 2x}{1 - \operatorname{sen} 2x} = \left(\dfrac{\operatorname{tg} x + 1}{\operatorname{tg} x - 1}\right)^2$.

38. $\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{1 + \cos 2x}$.

39. $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\operatorname{sen} 2x}{1 - \cos 2x}$.

40. $\dfrac{\operatorname{ctg} A - 1}{\operatorname{ctg} A + 1} = \sqrt{\dfrac{1 - \operatorname{sen} 2A}{1 + \operatorname{sen} 2A}}$.

41. $\operatorname{ctg} (A + 45^\circ) = \dfrac{1 - \operatorname{sen} 2A}{\cos 2A}$.

42. $\dfrac{\cos^3 x + \operatorname{sen}^3 x}{\cos x + \operatorname{sen} x} = \dfrac{2 - \operatorname{sen} 2x}{2}$.

43. $\dfrac{\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x}{\cos 3x + \cos x} = \operatorname{tg} x$.

44. $\dfrac{\operatorname{sen} 3x - \operatorname{sen} x}{\cos x - \cos 3x} = \operatorname{ctg} 2x$.

45. $\operatorname{sen} 3x = 4 \operatorname{sen} x \operatorname{sen} (60^\circ + x) \operatorname{sen} (60^\circ - x)$.

46. $\dfrac{\operatorname{sen} 4x}{\operatorname{sen} 2x} = 2 \cos 2x$.

47. $\dfrac{\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} 2A}{1 + \cos A + \cos 2A} = \operatorname{tg} A$.

48. $\sec 2A - \operatorname{tg} 2A = \dfrac{\cos A - \operatorname{sen} A}{\cos A + \operatorname{sen} A}$.

49. $\left(\operatorname{sen} \dfrac{x}{2} - \cos \dfrac{x}{2}\right)^2 = 1 - \operatorname{sen} x$.

50. $\operatorname{ctg} \dfrac{x}{4} = \dfrac{\operatorname{sen} \dfrac{x}{2}}{1 - \cos \dfrac{x}{2}}$.

51. $\operatorname{sen} (30^\circ + x) \operatorname{sen} (30^\circ - x) = \frac{1}{4} (\cos 2x - 2 \operatorname{sen}^2 x)$.

52. $\dfrac{\operatorname{ctg} (90^\circ + A)}{\cos 2A - 1} = \csc 2A$.

53. $\operatorname{ctg}^2 x(1-\cos 2x)+2\operatorname{sen}^2 x = 2.$

54. $1-4\operatorname{sen}^4 x-2\operatorname{sen}^2 x\cos 2x = \cos 2x.$

55. $\cos 3\alpha-\cos 7\alpha = 2\operatorname{sen} 5\alpha\operatorname{sen} 2\alpha.$

56. $\dfrac{\operatorname{sen} 5x-\operatorname{sen} 2x}{\cos 2x-\cos 5x} = \operatorname{ctg}\dfrac{7x}{2}.$

57. $\left(\operatorname{sen}\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{x}{2}\right)^2 = 1+\operatorname{sen} x.$

58. $\dfrac{1+\sec y}{\sec y} = 2\cos^2\dfrac{y}{2}.$

59. $\dfrac{\operatorname{sen} A+\operatorname{sen} B}{\cos A-\cos B} = -\operatorname{ctg} \tfrac{1}{2}.(A-B).$

60. $\dfrac{\cos\theta}{1-\operatorname{sen}\theta} = \dfrac{1+\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}}{1-\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}}.$

61. $\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}+\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = 2\csc x.$

62. $\dfrac{1-\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}} = \cos x.$

63. $1+\operatorname{tg} x\operatorname{tg}\dfrac{x}{2} = \sec x.$

64. $\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+2\operatorname{sen}^2\dfrac{x}{2}\operatorname{ctg} x = \operatorname{sen} x.$

65. $1+\operatorname{ctg}^2\dfrac{x}{2} = \dfrac{2}{\operatorname{sen} x\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}}.$

66. $\dfrac{\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}+\operatorname{ctg}^2\dfrac{x}{2}}{\operatorname{tg}^2\dfrac{x}{2}-\operatorname{ctg}^2\dfrac{x}{2}} = -\dfrac{1+\cos^2 x}{2\cos x}.$

67. $\operatorname{sen}\theta+\operatorname{sen} 2\theta+\operatorname{sen} 3\theta = \operatorname{sen} 2\theta(1+2\cos\theta).$

68. $\cos\theta+\cos 2\theta+\cos 3\theta = \cos 2\theta\,(1+2\cos\theta)$.

69. Expresar $\operatorname{sen} x+\cos y$ como un producto.

$$\textit{Solución.}\quad 2\operatorname{sen}\left(45^\circ+\frac{x-y}{2}\right)\cos\left(45^\circ-\frac{x+y}{2}\right).$$

70. Expresar $\operatorname{sen} x-\cos y$ como un producto.

71. Demostrar que el valor de $\operatorname{tg}^2\theta\,(1+\cos 2\theta)+2\cos^2\theta$ es el mismo para todos los valores de θ.

72. Investigar como varía $\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}+2\operatorname{sen}^2\dfrac{\theta}{2}\operatorname{ctg}\theta$ cuando θ crece de 0° a 90°.

Sugestión. Véase el problema 64.

73. Investigar la variación de $\cos^2\dfrac{\theta}{2}\left(\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}-1\right)^2$ cuando θ crece de 0° a 90°.

74. Investigar la variación de $\operatorname{ctg}\dfrac{\theta}{2}+\operatorname{tg}\dfrac{\theta}{2}$ cuando θ crece de 0° a 90°.

Demostrar que si A, B y C son los ángulos de un triángulo, se verifican las siguientes relaciones. Nótese que $C=180^\circ-(A+B)$.

75. $\operatorname{sen} A+\operatorname{sen} B+\operatorname{sen} C = 4\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}$.

76. $\operatorname{tg} A+\operatorname{tg} B+\operatorname{tg} C = \operatorname{tg} A\operatorname{tg} B\operatorname{tg} C$.

77. $\operatorname{sen} 2A+\operatorname{sen} 2B+\operatorname{sen} 2C = 4\operatorname{sen} A\operatorname{sen} B\operatorname{sen} C$.

78. $\cos A+\cos B+\cos C = 4\operatorname{sen}\dfrac{A}{2}\operatorname{sen}\dfrac{B}{2}\operatorname{sen}\dfrac{C}{2}+1$.

79. Transformar $\operatorname{sen}^4 A$ en $\frac{1}{8}\cos 4A-\frac{1}{2}\cos 2A+\frac{3}{8}$.

80. Transformar $\cos^4 A$ en $\frac{1}{8}\cos 4A+\frac{1}{2}\cos 2A+\frac{3}{8}$.

82. Ecuaciones trigonométricas. La igualdad

$$3\cos^2 x+\sqrt{3}\operatorname{sen} x+1=0$$

es un ejemplo de una ecuación trigonométrica. No es una identidad, es decir, no es verdadera para *todos* los valores de x. Por ejemplo, no es verdadera cuando $x = 0°$. En efecto, como sen $0° = 0$, cos $0° = 1$, vemos que el primer miembro cuando $x = 0°$ es igual a 4 y *no* es igual a cero. Luego, una ecuación trigonométrica difiere de una identidad en que no es verdadera para todos los valores del ángulo desconocido de que se trata.

Resolver una ecuación trigonométrica es encontrar los valores del ángulo desconocido que satisfacen a la ecuación dada.

No hay ningún método general para resolver ecuaciones trigonométricas, que se pueda seguir en todos los casos, pero se verá que son útiles las sugestiones del siguiente artículo.

83. Sugestiones para resolver una ecuación trigonométrica.

Primer paso. Exprésense todas las funciones trigonométricas que entran en la ecuación, en términos de funciones de un mismo ángulo, aprovechando las identidades conocidas. Así, si $2x$ y x aparecen en la ecuación, exprésense las funciones de $2x$ en términos de las funciones de x.

Segundo paso. Exprésense todas las funciones en términos de la misma función.

Tercer paso. Resuélvase algebraicamente (factorizando o de cualquier otra forma) considerando como incógnita la única función que entra ahora en la ecuación.

Frecuentemente se introducen raíces extrañas elevando al cuadrado ambos miembros de la ecuación, o al quitar denominadores. Los valores del ángulo obtenidos en tales casos, que no satisfacen a la ecuación dada, deben ser desechados. También debe cuidarse de que no se pierda ninguna raíz al extraer raíz cuadrada a ambos miembros de la ecuación, o al dividir ambos miembros por un factor.

EJEMPLO 1. Resolver la ecuación

$$\cos 2x \csc x + \csc x + \operatorname{ctg} x = 0.$$

Solución. Como $\cos 2x = \cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x$, obtenemos

Primer paso. $(\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x) \csc x + \csc x + \operatorname{ctg} x = 0.$

Segundo paso. Como $\csc x = \dfrac{1}{\operatorname{sen} x}$, y $\operatorname{ctg} x = \dfrac{\cos x}{\operatorname{sen} x}$, sustituyendo resulta

$$\frac{\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x}{\operatorname{sen} x} + \frac{1}{\operatorname{sen} x} + \frac{\cos x}{\operatorname{sen} x} = 0;$$

y, por tanto,

$$\cos^2 x - \operatorname{sen}^2 x + 1 + \cos x = 0.$$

Como $\operatorname{sen}^2 x = 1 - \cos^2 x$, sustituyendo tenemos

$$\cos^2 x - 1 + \cos^2 x + 1 + \cos x = 0,$$

o sea,

$$2 \cos^2 x + \cos x = 0.$$

Tercer paso. $\cos x (2 \cos x + 1) = 0.$

Igualando a cero cada factor, obtenemos

(1) $\cos x = 0,$

y

(2) $\cos x + \frac{1}{2} = 0$, o sea, $\cos x = -\frac{1}{2}$.

Los valores de x comprendidos entre 0° y 360° que satisfacen a la ecuación son, por lo tanto,

de (1), 90° y 270°; Art. 20

de (2), 120° y 240°.

Convirtiendo estos valores en radianes y ordenándolos en orden creciente de magnitud, hallamos las soluciones

(3) $\dfrac{\pi}{2}, \quad \dfrac{2\pi}{3}, \quad \dfrac{4\pi}{3}, \quad \dfrac{3\pi}{2}$ radianes.

A cada uno de estos valores de (3) puede sumársele o restársele cualquier múltiplo de 2π, y de esta manera se obtienen *todas* las soluciones.

EJEMPLO 2. Resolver la ecuación

$$2 \operatorname{sen}^2 x+\sqrt{3} \cos x+1 = 0.$$

Solución. Como $\operatorname{sen}^2 x = 1-\cos^2 x$, obtenemos

$$2-2 \cos^2 x+\sqrt{3} \cos x+1 = 0,$$

o sea,
$$2 \cos^2 x-\sqrt{3} \cos x-3 = 0.$$

Esta es una ecuación de segundo grado en $\cos x$. Resolviéndola, obtenemos

$$\cos x = \sqrt{3} \text{ ó } -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Ningún valor de x satisface la igualdad $\cos x = \sqrt{3}$, ya que el valor del coseno no puede exceder a 1.

De $\cos x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, hallamos $x = 150° = \frac{5\pi}{6}$, $x = -150° = -\frac{5\pi}{6}$.

Por tanto, todos los valores de x en radianes que satisfacen la ecuación están dados por la fórmula $x = 2n\pi \pm \frac{5\pi}{6}$, en donde n es un entero cualquiera, positivo o negativo.

EJEMPLO 3. Resolver la ecuación $5 \cos x = 4 \operatorname{sen} x+4$ para todos los valores de x desde 0° a 360°.

Solución. Para evitar que aparezcan radicales al expresar todas las las funciones en términos de una misma función, elevamos al cuadrado ambos miembros, y obtenemos

$$25 \cos^2 x = 16 \operatorname{sen}^2 x+32 \operatorname{sen} x+16.$$

Usando la identidad $\cos^2 x = 1-\operatorname{sen}^2 x$, obtenemos

$$25(1-\operatorname{sen}^2 x) = 16 \operatorname{sen}^2 x+32 \operatorname{sen} x+16,$$

o sea,

(1)
$$41 \operatorname{sen}^2 x+32 \operatorname{sen} x-9 = 0.$$

Resolviendo esta ecuación cuadrática tomando como incógnita $\operatorname{sen} x$, obtenemos

$$\operatorname{sen} x = 9/41 = 0,2195 \text{ y } -1.$$

Los valores correspondientes de x comprendidos entre 0° y 360° son

$$x = 12° 41', \ 167° 19' \text{ y } 270°.$$

Estos valores de x son las soluciones de la ecuación (1); pero como elevamos al cuadrado ambos miembros de la ecuación dada, podemos haber introducido soluciones extrañas. En este caso, observemos que cos $167^\circ\ 19'$ es negativo y sen $167^\circ\ 19'$ es positivo; luego para este ángulo el primer miembro de la ecuación dada es negativo y el segundo miembro es positivo. Por tanto, la ecuación dada no se satisface y $167^\circ\ 19'$ debe ser desechado. Por sustitución se encuentra que los dos ángulos restantes sí satisfacen a la ecuación dada. Las soluciones son

$$x = 12^\circ\ 41' \text{ y } 270^\circ.$$

PROBLEMAS

Resolver las siguientes ecuaciones para valores de x comprendidos entre 0° y 360°:

1. $\operatorname{sen}^2 x = \frac{1}{4}$. *Solución.* 30°, 150°, 210°, 330°.

2. $\csc^2 x = 2$.

3. $\operatorname{tg}^2 x - 3 = 0$. *Solución.* 60°, 120°, 240°, 300°.

4. $\sec^2 x - 4 = 0$.

5. $\operatorname{tg} 2x = 1$. *Solución.* $22\frac{1}{2}^\circ$, $112\frac{1}{2}^\circ$, $202\frac{1}{2}^\circ$, $292\frac{1}{2}^\circ$.

6. $2 \cos 2x + \sqrt{3} = 0$.

7. $\operatorname{sen}^2 2x = 1$. *Solución.* 45°, 135°, 225°, 315°.

8. $4 \cos^2 2x - 1 = 0$.

9. $\operatorname{ctg}^2 \frac{x}{2} = 3$. *Solución.* 60°, 300°.

10. $\sec^2 \frac{x}{2} = 2$.

Hallar, en radianes, todos los ángulos comprendidos entre 0 y 2π que satisfacen a las siguientes ecuaciones:

11. $(\operatorname{tg} x + 1)(\sqrt{3} \operatorname{ctg} x - 1) = 0$.

    Solución. $\frac{\pi}{3}$, $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{4\pi}{3}$, $\frac{7\pi}{4}$.

12. $(2 \cos x + 1)(\operatorname{sen} x - 1) = 0$.

13. $(4 \cos^2 \theta - 3)(\csc \theta + 2) = 0.$

Solución. $\frac{\pi}{6}, \quad \frac{5\pi}{6}, \quad \frac{7\pi}{6}, \quad \frac{11\pi}{6}.$

14. $2 \operatorname{ctg} \theta \operatorname{sen} \theta + \operatorname{ctg} \theta = 0.$

15. $\operatorname{tg}^2 x - (1+\sqrt{3}) \operatorname{tg} x + \sqrt{3} = 0.$

Solución. $\frac{\pi}{4}, \quad \frac{\pi}{3}, \quad \frac{5\pi}{4}, \quad \frac{4\pi}{3}.$

16. $2 \operatorname{sen}^2 x + (2-\sqrt{3}) \operatorname{sen} x - \sqrt{3} = 0.$

Resolver las siguientes ecuaciones para valores del ángulo comprendidos entre 0° y 360°:

17. $2 \operatorname{sen}^2 x + 3 \cos x = 0.$ *Solución.* 120°, 240°.

18. $\cos^2 \alpha - \operatorname{sen}^2 \alpha = \frac{1}{2}.$

19. $2\sqrt{3} \cos^2 \alpha = \operatorname{sen} \alpha.$ *Solución.* 60°, 120°.

20. $\operatorname{sen}^2 y - 2 \cos y + \frac{1}{4} = 0.$

21. $4 \sec^2 y - 7 \operatorname{tg}^2 y = 3.$ *Solución.* 30°, 150°, 210°, 330°.

22. $\operatorname{tg} B + \operatorname{ctg} B = 2.$

23. $\operatorname{sen} x + \cos x = 0.$ *Solución.* 135°, 315°.

24. $\operatorname{sen} x + \cos x = 1.$

25. $2 \operatorname{tg}^2 x + 3 \sec x = 0.$ *Solución.* 120°, 240°.

26. $\cos^2 x + 2 \operatorname{sen} x + 2 = 0.$

27. $\operatorname{ctg}^2 \theta - 3 \csc \theta + 3 = 0.$ *Solución.* 30°, 90°, 150°.

28. $\operatorname{tg}^2 x + \operatorname{ctg}^2 x - 2 = 0.$

29. $\csc x \operatorname{ctg} x = 2\sqrt{3}.$ *Solución.* 30°, 330°.

30. $\operatorname{sen} x \cos x + \frac{1}{4} = 0.$

31. $\cos 2x + \cos x = -1.$ *Solución.* 90°, 120°, 240°, 270°.

32. $2 \operatorname{sen} y = \operatorname{sen} 2y.$

33. $\cos 2x = \cos x.$ *Solución.* 0°, 120°, 240°, 360°.

34. $\cos 2x = \cos^2 x.$

35. $\operatorname{tg}(x+45°) = 1+\operatorname{sen} 2x$. *Solución.* $0°, 135°, 180°, 315°, 360°$

36. $\operatorname{sen}(60°-x)-\operatorname{sen}(60°+x) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

37. $\operatorname{sen}(30°+x)-\cos(60°+x) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$.

Solución. $210°, 330°$.

38. $\operatorname{tg}(45°-x)+\operatorname{ctg}(45°-x) = 4$.

39. $\operatorname{sen} x \operatorname{sen} \frac{x}{2} = 1-\cos x$. *Solución.* $0°, 360°$.

40. $\operatorname{sen} \frac{x}{2} + \cos x = 1$.

41. $\csc y + \operatorname{ctg} y = \sqrt{3}$. *Solución.* $60°$.

42. $3(\sec^2 a+\operatorname{ctg}^2 a) = 13$.

43. $\operatorname{sen} x = 3 \cos x$. *Solución.* $71° 34'$, $251° 34'$.

44. $2 \cos x = \cos 2x$.

45. $\operatorname{tg} x = \operatorname{tg} 2x$. *Solución.* $0°, 180°, 360°$.

46. $3 \cos^2 x+5 \operatorname{sen} x-1 = 0$.

47. $3 \operatorname{sen} x \operatorname{tg} x-5 \sec x+7 = 0$. *Solución.* $70° 32'$, $289° 28'$.

48. $\csc^2 x(1+\operatorname{sen} x \operatorname{ctg} x) = 2$.

49. $\operatorname{tg} x+\sec^2 x-3 = 0$. *Solución.* $45°$, $116° 34'$, $225°$, $296° 34'$.

50. $\operatorname{sen} x+\cos 2x = 4 \operatorname{sen}^2 x-1$.

51. $\operatorname{sen}(2x-180°) = \cos x$. *Solución.* $90°, 210°, 270°, 330°$.

52. $\sec(x+120°)+\sec(x-120°) = 2 \cos x$.

53. $\cos^2 x+2 \operatorname{sen} x = 0$. *Solución.* $204° 28'$, $335° 32'$.

54. $\sec^2 x-4 \operatorname{tg} x = 0$.

55. $\operatorname{sen}^2 2x-\operatorname{sen} 2x-2 = 0$. *Solución.* $135°, 315°$.

56. $\operatorname{tg}^2 \frac{x}{2} - \operatorname{tg} \frac{x}{2} - 2 = 0$.

57. $4 \text{ sen } x+3 \cos x = 3.$ *Solución.* $0°, 106° 16', 360°.$

58. $5 \text{ sen } x = 4 \cos x+4.$

59. $\text{sen } x+\text{sen } 2x+\text{sen } 3x = 0.$

Solución. $0°, 90°, 120°, 180°, 240°, 270°, 360°.$

60. $\text{tg } x+\text{tg } 2x+\text{tg } 3x = 0.$

61. $\text{sen } 4x-\cos 3x = \text{sen } 2x.$

Solución. $30°, 90°, 150°, 210°, 270°, 330°.$

62. $\text{sen } 3x-\text{sen } x = \text{sen } 5x.$

63. ¿Cuáles son los ángulos agudos de un triángulo rectángulo si la diferencia de los cuadrados de los catetos es igual al doble de su producto? *Solución.* $22\frac{1}{2}°, 67\frac{1}{2}°.$

64. ¿Qué ángulos comprendidos entre 90° y 270° satisfacen la ecuación

$$\cos(x+60°) \cos(x-60°) = -\tfrac{1}{2}?$$

84. Fórmula general para un ángulo cuya función se conoce. Algunas veces es deseable escribir una expresión que comprenda a todos los ángulos para los cuales una función tiene un valor dado. En seguida deduciremos tales expresiones. Es conveniente usar medidas circulares para los ángulos.

Observemos primero lo siguiente deducido del Artículo 10.

Como todos los ángulos que tienen los mismos lados inicial y final tienen las mismas funciones trigonométricas, se concluye que se puede sumar o restar 2π a cualquier ángulo tantas veces como se quiera sin que cambie el valor de ninguna de las funciones. Por tanto, cada función del ángulo A es igual a la misma función del ángulo

$$2\,m\pi+A,$$

en donde m es cero o un entero cualquiera positivo o negativo.

Empezaremos por deducir una expresión para todos los ángulos que tienen el mismo seno. Estos ángulos tendrán también la misma cosecante, ya que el seno y la cosecante son funciones recíprocas. Cuando el valor dado del seno es positivo, los ángulos estarán comprendidos en el primero o en el segundo cuadrante. Cuando el valor del seno es negativo los ángulos estarán en el tercero o en el cuarto cuadrante.

Si x es un ángulo cualquiera, tenemos

$$\operatorname{sen}(\pi - x) = \operatorname{sen} x. \qquad \text{Arts. 25 y 75}$$

Por tanto, los ángulos x y $\pi - x$ tienen senos iguales. Si el ángulo x está en el primer cuadrante, el ángulo $\pi - x$ estará en el segundo cuadrante. Si el ángulo x está en el tercer cuadrante, el ángulo $\pi - x$ estará en el cuarto cuadrante. Sumando $2m\pi$ a cada uno de estos ángulos, obtenemos

(1) $$2m\pi + x$$

y

(2) $$(2m+1)\pi - x.$$

La fórmula (1) da todos los ángulos que tienen el mismo lado final que x.

La fórmula (2) da todos los ángulos que tienen el mismo lado final que $\pi - x$.

Estas dos fórmulas pueden combinarse en una sola

(3) $$n\pi + (-1)^n x,$$

en donde n es un entero, positivo o negativo. En efecto, si $n = 2m$ (un número par), (3) es la misma que (1). Si $n = 2m+1$ (un número impar), (3) es la fórmula (2).

De las relaciones

$$\operatorname{tg}(\pi + x) = \operatorname{tg} x, \qquad \text{Arts. 26 y 75}$$

$$\cos(2\pi - x) = \cos x; \qquad \text{Arts. 27 y 75}$$

deducimos, por razonamientos semejantes, expresiones para todos los ángulos que tienen la misma tangente (o cotangente), y para todos los ángulos que tienen el mismo coseno (o secante). Las fórmulas generales son las siguientes:

Para todos los ángulos que tienen el mismo seno (o cosecante),

$$n\pi + (-1)^n x. \tag{4}$$

Para todos los ángulos que tienen la misma tangente (o cotangente),

$$n\pi + x. \tag{5}$$

Para todos los ángulos que tienen el mismo coseno (o secante),

$$2n\pi \pm x. \tag{6}$$

En (4), (5) y (6), n es un entero cualquiera, positivo o negativo.

Cuando se desean obtener fórmulas que incluyan todas las soluciones de una ecuación trigonométrica, se pueden usar (4) a (6). (Compárese el ejemplo 2 del Artículo 83.)

EJEMPLO 1. Hallar los cuatro ángulos positivos más pequeños cuya cosecante sea igual a 2.

Solución. El menor ángulo positivo cuya cosecante es 2 es 30°, o sea, $\frac{\pi}{6}$. Sustituyamos en (4) $x = \frac{\pi}{6}$. Se obtiene:

$$n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}.$$

Cuando $n = 0$, obtenemos $\frac{\pi}{6} = 30°$.

Cuando $n = 1$, obtenemos $\pi - \frac{\pi}{6} = 150°$.

Cuando $n = 2$, obtenemos $2\pi + \frac{\pi}{6} = 390°$.

Cuando $n = 3$, obtenemos $3\pi - \frac{\pi}{6} = 510°$.

EJEMPLO 2. Dado $\cos A = -\frac{1}{\sqrt{2}}$, obtener la **fórmula** general para A. Calcular también los cinco valores positivos más pequeños de A.

Solución. El menor ángulo positivo cuyo coseno $= -\frac{1}{\sqrt{2}}$ es $135°$, o sea, $\frac{3\pi}{4}$. Si en (6) hacemos $x = \frac{3\pi}{4}$, obtenemos:

$$A = 2n\pi \pm \frac{3\pi}{4}.$$

Cuando $n = 0$, $\quad A = \frac{3\pi}{4} = 135°$.

Cuando $n = 1$, $\quad A = 2\pi \pm \frac{3\pi}{4} = 225°$ y $495°$.

Cuando $n = 2$, $\quad A = 4\pi \pm \frac{3\pi}{4} = 585°$ y $855°$.

PROBLEMAS

1. Si $\operatorname{sen} A = \frac{1}{2}$, obtener la fórmula general para A. Hallar también los cuatro valores positivos más pequeños de A.

Solución. $n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{6}$; $30°$, $150°$, $390°$, $510°$.

2. Dado $\cos A = \frac{\sqrt{3}}{2}$, obtener la fórmula general para A. Hallar también todos los valores de A numéricamente menores que 2π.

3. Dada $\operatorname{tg} A = 1$, hallar la fórmula general para A. Hallar también los valores de A numéricamente menores que 4π.

Solución. $n\pi + \frac{\pi}{4}$; $\frac{\pi}{4}$, $-\frac{3\pi}{4}$, $\frac{5\pi}{4}$, $-\frac{7\pi}{4}$, $\frac{9\pi}{4}$, $-\frac{11\pi}{4}$, $\frac{13\pi}{4}$, $-\frac{15\pi}{4}$.

4. Dado $\operatorname{sen} 2x = \frac{1}{2}$, demostrar que $x = \frac{n\pi}{2} + (-1)^n \frac{\pi}{12}$.

5. Dado $\cos 3x = -\frac{1}{2}$, demostrar que $x = \frac{2n\pi}{3} \pm \frac{2\pi}{9}$.

Dar las fórmulas generales para los ángulos que satisfacen a las siguientes ecuaciones:

6. $\operatorname{sen} A = \pm 1$.

7. $\operatorname{ctg} x = \pm\sqrt{3}$. *Solución.* $x = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$.

8. $\cos y = \pm \frac{1}{2}$.

9. $\operatorname{tg} B = \pm 1$. *Solución.* $B = n\pi \pm \frac{\pi}{4}$.

10. $\csc C = \pm\sqrt{2}$.

11. $\sec A = \pm \frac{2}{\sqrt{3}}$. *Solución.* $A = n\pi \pm \frac{\pi}{6}$.

12. $\csc x = 2$.

13. Hallar la fórmula general de los ángulos x que satisfacen las condiciones $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}$ y $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Solución. Como $\operatorname{sen} x$ es negativo y $\operatorname{tg} x$ es positivo, x debe estar en el tercer cuadrante. El ángulo positivo más pequeño que satisface la condición $\operatorname{sen} x = -\frac{1}{2}$ es 210°, o sea, $\frac{7\pi}{6}$, y este ángulo también satisface la condición $\operatorname{tg} x = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Por tanto, $$x = 2n\pi + \frac{7\pi}{6}.$$

14. Hallar la fórmula general de los ángulos x que satisfacen las condiciones $\cos x = \frac{\sqrt{2}}{2}$ y $\operatorname{ctg} x = -1$.

85. Funciones trigonométricas inversas. El valor de una función trigonométrica de un ángulo depende del valor del ángulo, y, recíprocamente, el valor de un ángulo depende del valor de la función. Si se da un ángulo, se puede hallar el seno de ese ángulo; si se da un seno, se puede expresar el ángulo a que corresponde (Art. 84). Frecuentemente es conveniente representar un ángulo por el valor de una de sus funciones. Así, en vez de decir que *un ángulo es de* 30°, podemos decir (lo que equivale a la misma cosa) que *es el ángulo positivo más pequeño cuyo seno es* $\frac{1}{2}$. Es decir, podemos hablar del "ángulo cuyo seno es y", "ángulo cuya tangente es y", etc. Estas expresiones son reemplazadas por

$$\text{arc sen } y, \quad \text{arc tg } y, \quad \text{etc.},$$

y se llaman *funciones trigonométricas inversas.*

Las igualdades

$$(1) \qquad y = \text{sen } x, \quad y = \text{tg } x, \quad y = \cos x, \quad \text{etc.},$$

pueden escribirse también

$$(2) \qquad x = \text{arc sen } y, \quad x = \text{arc tg } y, \quad x = \text{arc cos } y, \quad \text{etc.}$$

Los segundos miembros en (2) se leen "arco seno y", "arco tangente y", "arco coseno y", etc. En (2), x es una función trigonométrica inversa de y. En (1), a un valor dado de x corresponderá uno y solamente un valor de y. Pero en (2), a un valor dado de y corresponderá un número infinito de valores diferentes de x, como se demostró en el Artículo 84. Por tanto:

Las funciones trigonométricas directas son uniformes, y las funciones trigonométricas inversas son multiformes.

Definición. *Se llama* **valor principal** *de una función trigonométrica inversa a su valor numérico más pequeño, dándose preferencia al valor positivo para el arco coseno y el arco secante.*

Veamos algunos ejemplos:

arc sen $\frac{1}{2}$, valor principal, $30°$;

arc tg (-1), valor principal, $-45°$;

arc cos $(-\frac{1}{2})$, valor principal, $120°$.

Todos los valores posibles de una función trigonométrica inversa pueden expresarse usando el valor principal y las fórmulas (4) a (6) del Artículo 84. Así, para

arc sen x, los valores están dados por $x = n\pi + (-1)^n x_0$,

arc tg x, todos los valores están dados por $x = n\pi + x_0$,

arc sec x, todos los valores están dados por $x = 2\,n\pi \pm x_0$,

siendo en cada caso x_0 el valor principal.

Como el seno y el coseno de un ángulo no pueden ser menores que -1 ni mayores que $+1$, se concluye que las expresiones

$$\text{arc sen } a \quad \text{y} \quad \text{arc cos } a$$

no tienen significado si a no está comprendido entre -1 y $+1$ inclusive. Análogamente, es evidente que las expresiones

$$\text{arc sec } a \quad \text{y} \quad \text{arc csc } a$$

no tienen significado para valores de a comprendidos entre -1 y $+1$.

Las igualdades (2) se escriben a veces

(3) $x = \text{sen}^{-1}\,y,\ x = \text{tg}^{-1}\,y,\ x = \cos^{-1}\,y$, o también

$x = \text{ang sen } y,\ x = \text{ang tg } y,\ x = \text{ang cos } y.$

El -1 no es un exponente sino una parte del símbolo. En el ejemplo 3, y en algunos de los problemas que siguen, se usa esta notación.

Ahora vamos a ver cómo demostrar las identidades que contienen funciones trigonométricas inversas para los valores principales de los ángulos.

EJEMPLO 1. Demostrar la identidad

(a) $$\text{arc tg } m + \text{arc tg } n = \text{arc tg } \frac{m+n}{1-mn}.$$

Demostración. Sean

(b) $$A = \text{arc tg } m \quad \text{y} \quad B = \text{arc tg } n.$$

(c) Entonces, $$\text{tg } A = m \quad \text{y} \quad \text{tg } B = n.$$

Sustituyendo los valores (b) en el primer miembro de (a), obtenemos

$$A + B = \text{arc tg } \frac{m+n}{1-mn},$$

o, lo que es lo mismo,

(d) $$\text{tg } (A+B) = \frac{m+n}{1-mn}.$$

Pero, del Artículo 75,

(e) $$\text{tg } (A+B) = \frac{\text{tg } A + \text{tg } B}{1 - \text{tg } A \ \text{tg } B}.$$

Sustituyendo los valores de (c) en el segundo miembro de (e), obtenemos

(f) $$\text{tg } (A+B) = \frac{m+n}{1-mn}.$$

Como (d) y (f) son idénticas, hemos demostrado que (a) es verdadera.

EJEMPLO 2. Demostrar que

(a) $$\text{arc sen } \tfrac{3}{5} + \text{arc cos } \tfrac{15}{17} = \text{arc sen } \tfrac{77}{85}.$$

Demostración. Sean

(b) $$A = \text{arc sen } \tfrac{3}{5} \quad \text{y} \quad B = \text{arc cos } \tfrac{15}{17}.$$

(c) Entonces, $$\text{sen } A = \tfrac{3}{5} \quad \text{y} \quad \cos B = \tfrac{15}{17}.$$

(d) También, $$\cos A = \tfrac{4}{5} \quad \text{y} \quad \text{sen } B = \tfrac{8}{17}.$$ Art. 15

Sustituyendo los valores de (b) en el primer miembro de (a), obtenemos

$$A+B = \text{arc sen } {}^{77}/_{85},$$

o, lo que es lo mismo,

(e) $$\text{sen } (A+B) = {}^{77}/_{85}.$$

Pero, según el Artículo 73,

(f) $$\text{sen } (A+B) = \text{sen } A \cos B + \cos A \text{ sen } B.$$

Sustituyendo los valores dados en (c) y (d) en el segundo miembro de (f), obtenemos

(g) $$\text{sen } (A+B) = {}^{3}/_{5} \cdot {}^{15}/_{17} + {}^{4}/_{5} \cdot {}^{8}/_{17} = {}^{77}/_{85}.$$

Como (e) y (g) son idénticas, hemos demostrado que (a) es verdadera.

El siguiente ejemplo muestra la manera de resolver ecuaciones que contienen funciones trigonométricas inversas.

EJEMPLO 3. Resolver la siguiente ecuación:

$$\text{tg}^{-1}\, 2x + \text{tg}^{-1}\, 3x = \frac{\pi}{4}.$$

Solución. Tomando la tangente de ambos miembros de la ecuación, resulta:

$$\text{tg}\, (\text{tg}^{-1}\, 2x + \text{tg}^{-1}\, 3x) = \text{tg}\, \frac{\pi}{4},$$

y, según el Artículo 75,

$$\frac{\text{tg}\, (\text{tg}^{-1}\, 2x) + \text{tg}\, (\text{tg}^{-1}\, 3x)}{1 - \text{tg}\, (\text{tg}^{-1}\, 2x)\, \text{tg}\, (\text{tg}^{-1}\, 3x)} = 1,$$

o sea,

$$\frac{2x+3x}{1-2x\cdot 3x} = 1.$$

Quitando denominadores y despejando x, obtenemos

$$x = {}^{1}/_{6} \quad \text{ó} \quad -1.$$

El valor $x = \frac{1}{6}$ satisface la ecuación para los valores principales de $\operatorname{tg}^{-1} 2x$ y $\operatorname{tg}^{-1} 3x$. El valor $x = -1$ satisface la ecuación para los valores

$$\operatorname{tg}^{-1}(-2) = 116,57°,$$

$$\operatorname{tg}^{-1}(-3) = -71,57°.$$

PROBLEMAS

Escribir (en radianes) fórmulas generales para los valores de las siguientes funciones:

1. $\operatorname{arc\,sen} \frac{1}{\sqrt{2}}$. *Solución.* $n\pi + (-1)^n \frac{\pi}{4}$.

2. $\operatorname{arc\,sen}\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$.

3. $\operatorname{arc\,cos} \frac{\sqrt{3}}{2}$. *Solución.* $2n\pi \pm \frac{\pi}{6}$. **4.** $\cos^{-1}\left(-\frac{1}{2}\right)$.

5. $\operatorname{arc\,tg} \frac{1}{\sqrt{3}}$. *Solución.* $n\pi + \frac{\pi}{6}$. **6.** $\operatorname{arc\,tg}(\pm\sqrt{3})$.

7. $\operatorname{ctg}^{-1}(\pm 1)$. *Solución.* $n\pi \pm \frac{\pi}{4}$. **8.** $\operatorname{arc\,ctg}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

Demostrar las siguientes igualdades:

9. $\operatorname{arc\,tg} a - \operatorname{arc\,tg} b = \operatorname{arc\,tg} \frac{a-b}{1+ab}$.

10. $2 \operatorname{tg}^{-1} a = \operatorname{sen}^{-1} \frac{2a}{1+a^2}$.

11. $2 \operatorname{arc\,sen} a = \operatorname{arc\,cos}(1-2a^2)$.

12. $\operatorname{arc\,tg} a = \operatorname{arc\,sen} \frac{a}{\sqrt{1+a^2}}$.

13. $\operatorname{tg}^{-1} \frac{m}{n} - \operatorname{tg}^{-1} \frac{m-n}{m+n} = \frac{\pi}{4}$.

14. $\text{arc cos } \frac{4}{5} + \text{arc tg } \frac{3}{5} = \text{arc tg } \frac{27}{11}$.

15. $2 \text{ tg}^{-1} \frac{2}{3} = \text{tg}^{-1} \frac{12}{5}$.

16. $2 \text{ arc tg } a = \text{arc tg } \dfrac{2a}{1-a^2}$.

17. $\text{arc sen } a = \text{arc cos } \sqrt{1-a^2}$.

18. $\text{sen}^{-1} a = \text{tg}^{-1} \dfrac{a}{\sqrt{1-a^2}}$.

19. $\text{arc tg } a = \text{arc cos } \dfrac{1}{\sqrt{1+a^2}}$.

20. $\text{sen}^{-1} \frac{3}{5} + \text{sen}^{-1} \frac{8}{17} = \text{sen}^{-1} \frac{77}{85}$.

21. $\text{arc cos } \frac{4}{5} + \text{arc cos } \frac{12}{13} = \text{arc cos } \frac{33}{65}$.

22. $\text{arc tg } \frac{1}{7} + \text{arc tg } \frac{1}{13} = \text{arc tg } \frac{2}{9}$.

Resolver las siguientes ecuaciones:

23. $\text{tg}^{-1} x + \text{tg}^{-1} (1-x) = \text{tg}^{-1} (\frac{4}{3})$. *Solución.* $x = \frac{1}{2}$.

24. $\text{arc tg } x + 2 \text{ arc ctg } x = \dfrac{2\pi}{3}$.

25. $\text{tg}^{-1} \dfrac{x-1}{x+2} + \text{tg}^{-1} \dfrac{x+1}{x+2} = \dfrac{\pi}{4}$. *Solución.* $x = \pm \dfrac{\sqrt{10}}{2}$.

26. $\cos^{-1} \dfrac{x^2-1}{x^2+1} + \text{tg}^{-1} \dfrac{2x}{x^2-1} = \dfrac{2\pi}{3}$.

27. $\text{arc tg } \dfrac{x+1}{x-1} + \text{arc tg } \dfrac{x-1}{x} = \text{arc tg } (-7)$.

Solución. $x = 2$.

28. $\text{tg}^{-1} (x+1) + \text{tg}^{-1} (x-1) = \text{tg}^{-1} \frac{8}{31}$.

29. $\text{sen}^{-1} x + \text{sen}^{-1} 2x = \dfrac{\pi}{3}$. *Solución.* $x = \pm \dfrac{\sqrt{21}}{14}, \pm \dfrac{1}{2}$.

30. $\text{arc sen } \dfrac{5}{x} + \text{arc sen } \dfrac{12}{x} = \dfrac{\pi}{2}$.

Hallar los valores de las siguientes funciones:

31. sen $(\text{tg}^{-1}\ {}^5\!/_{12})$. *Solución.* $\pm{}^5\!/_{13}$.

32. ctg $(2 \text{ arc sen } {}^3\!/_5)$.

33. sen $(\text{tg}^{-1}\ {}^1\!/_2 + \text{tg}^{-1}\ {}^1\!/_3)$. *Solución.* $\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$.

34. cos $(2 \text{ arc cos } a)$.

35. tg $(2 \text{ tg}^{-1}\ a)$. *Solución.* $\dfrac{2a}{1-a^2}$.

36. cos $(2 \text{ arc tg } a)$.

CAPITULO VII

ANGULOS AGUDOS PROXIMOS A 0° O A 90°

86. Vamos a demostrar el siguiente teorema:

Teorema. *Cuando el ángulo* x *tiende a cero, cada una de las razones* $\frac{\text{sen } x}{x}$, $\frac{\text{tg } x}{x}$, *tiene por límite la unidad, siendo* x *la medida circular del ángulo.*

Demostración. Sea O el centro de un círculo cuyo radio es la unidad. Sea el arco $AP = x$, y el arco $AP' = x$ en valor numérico. Trácese PP', y sean PT y $P'T$ las tangentes trazadas al círculo en P y P'. Por Geometría,

$$(A) \qquad PQP' < PAP' < PTP'.$$

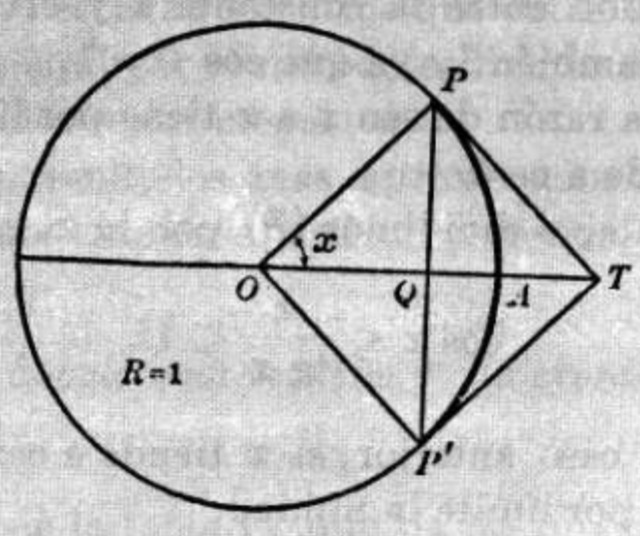


Fig. 113

Pero $\quad PQP' = PQ + QP' = 2 \text{ sen } x$ en valor numérico,

$\quad PAP' = PA + AP' = 2\,x$ en valor numérico,

y $\quad PTP' = PT + TP' = 2 \text{ tg } x$ en valor numérico.

Sustituyendo en (A),

$$2 \text{ sen } x < 2x < \text{tg } x.$$

Dividiendo por 2, tenemos

$$(B) \qquad \text{sen } x < x < \text{tg } x,$$

lo que demuestra que:

Si x *es la medida circular de un ángulo agudo, éste estará siempre entre* sen x *y* tg x, *siendo mayor que* sen x *y menor que* tg x.

Dividiendo **(B)** por sen x, obtenemos

$$1 < \frac{x}{\text{sen } x} < \frac{1}{\cos x}.$$

O también, usando los valores recíprocos,

$$1 > \frac{\text{sen } x}{x} > \cos x.$$

Si hacemos tender x a cero, vemos que el valor de $\frac{\text{sen } x}{x}$ está comprendido entre la constante 1 y el valor límite de $\cos x$, que es también 1, ya que $\cos 0 = 1$.

Por tanto, la razón de sen x a x tiene por límite la unidad cuando x tiende a cero.

Análogamente, si dividimos **(B)** por tg x, obtenemos

$$\cos x < \frac{x}{\text{tg } x} < 1.$$

Como en el caso anterior, si x tiende a cero, la razón de tg x a x tiene por límite la unidad.

Los límites que figuran en el teorema que acabamos de demostrar son de gran importancia en las matemáticas puras y aplicadas. Estos resultados pueden enunciarse como sigue:

Si x *es la medida circular de un ángulo muy pequeño, podemos sustituir en cálculos aproximados* sen x *y* tg x *por* x.

87. Funciones de ángulos agudos positivos próximos a 0° y 90°. Hasta aquí hemos supuesto que las diferencias en las funciones trigonométricas son proporcionales a las diferencias en los ángulos correspondientes. Aunque esta proporcionalidad no es estrictamente verdadera, es, en general, suficientemente exacta para la mayoría de los fines prácticos, a menos que los ángulos sean muy cercanos a 0° ó a 90°. En el uso de los logaritmos hemos supuesto también que las diferencias en los logaritmos de las funciones trigonométricas son proporcionales a las diferencias en los ángulos correspondientes. Esto dará resultados suficientemente aproximados para la mayoría de los casos si usamos las tablas II o III del final del libro y nos limitamos a operar con ángulos comprendidos entre 18′ y 89° 42′, inclusive. Pero si tenemos un ángulo comprendido entre 0° y 18′ o un ángulo comprendido entre 89° 42′ y 90°, y buscamos resultados exactos, es evidente que el método ordinario no servirá. Por ejemplo, la diferencia tabular (tabla II) entre el logaritmo seno, tangente o cotangente de 8′ y el logaritmo de las funciones correspondientes de 9′ es 512, mientras que entre 9′ y 10′ es 457. Si interpolamos aquí por el método ordinario es evidente que nuestros resultados serán inexactos.

Para obtener resultados más aproximados podemos usar el principio establecido en el artículo anterior, a saber:

Podemos reemplazar en nuestros cálculos sen x *y* tg x *por* x *cuando* x *es un ángulo muy pequeño y está expresado en medida circular.*

Por ejemplo, de la tabla IV que da las funciones naturales de los ángulos, tenemos

$$\text{sen } 2° \ 12' = 0{,}0384,$$

$$\text{tg } 2° \ 12' = 0{,}0384.$$

También, $\quad 2° \ 12' \ (= 2{,}2°) = 0{,}0384$ radianes